Math. Maced.
Vol. 1 (2003)
77-88

КОНЕЧНО ГЕНЕРИРАНИ ПОТПОЛУГРУПИ ОД АДИТИВНАТА ПОЛУГРУПА $\mathbb{N}^n$

ДОНЧО ДИМОВСКИ*, МАГДАЛЕНА ХАЏИ - КОСТА ЈОСИФОВСКА**

Abstract. Во оваа работа даден е геометриски опис на конечно генерирани потполугрупи од адитивната полугрупа $\mathbb{N}^n$.

1. Вовед

Во овој дел ќе формулираме неколку основни дефиниции и резултати, потребни во понатамошниот текст.

Нека $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ е множеството природни броеви заедно со нулата, а нека $\mathbb{R}$ е полето од реалните броеви. Елементот $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ од n - димензионалниот векторски простор $\mathbb{R}^n$ се нарекува n - димензионален вектор. Непразно подмножество C од $\mathbb{R}^n$ се нарекува (**конвексен**) конус ако за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ и секои реални $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in C$.

Конус **генериран од множество** $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ се нарекува множеството:

$$\text{cone}(\mathbf{X}) := \{\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_m \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_m \mathbf{x}_m \geq 0\}. \tag{1}$$

Значи $\text{cone}(X)$ е најмалиот конвексен конус, што ги содржи елементите $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ и за да се нагласи тоа се користи ознаката $\text{cone}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$.

Нека $(G, +)$ е адитивна полугрупа. Секое непразно подмножество A од G, генерира потполугрупа од G. Притоа A е генераторно за G акко, потполугрупата генерирана со A е еднаква со полугрупата G.

Потполугрупата од адитивната полугрупа $\mathbb{N}^n$ (со операцијата собирање вектори), генерирана со подмножество $H = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t\} \subseteq \mathbb{N}^n$, означена со $< H >$ е:

$$< H > := \{\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \mathbf{a}_i \mid \alpha_i \in \mathbb{N}\} \tag{2}$$

Потполна класификација на потполугрупите од адитивната полугрупа $\mathbb{N}^n$ не ни е позната, освен во случајот $n = 1$. За $n = 1$, во [2] е докажана следнава теорема.

2000 Mathematics Subject Classification. 20M14, 20M05.
Key words and phrases. konus, aditivna potpolugrupa od $\mathbb{N}^n$.

Теорема 1.1. [2] *Нека* G *е потполугрупа од адитивната полугрупа* $\mathbb{N}\backslash\{0\}$. *Нека* n *е најмалиот број во* G, d *е најголемиот заеднички делител на елементите од* G *и* $n = kd$. *Да го означиме со* A_i *множеството на оние елементи од* G *што при делењето со* n *даваат остаток* id , *т.е.* $A_i = \{a \mid a \in G,\ a = tn + id,\ t \in \mathbb{N}\}$. *Тогаш:*

(i) $G = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}$, *дисјунктна унија.*

(ii) *Постојат* $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, *такви што:* $a_0 = 1$ *и* $A_i = \{tn + id \mid t \geq a_i\}$ *и притоа:*

$$a_i + a_j \geq \begin{cases} a_{i+j}, & i+j < k \\ a_{i+j-k} - 1, & i+j \geq k. \end{cases}$$

(iii) *Ако* $m_i = a_i n + id$, *тогаш* $n = m_0$, *и* $\{m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$ *е генераторно жество за* G.

(iv) *Нека* $b = \max\{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$, $s = \max\{i \mid a_i = b\}$ *и* $c = (b-1)k + s + 1$. *Тогаш:*

$(c-1)d \notin G$ и $\{td \mid t \geq c\} = G^* \subseteq G$. $\square$

Ова својство не важи за $n > 1$.

Пример 1.1. Нека G е адитивната потполугрупа од $\mathbb{N}^2$ генерирана со $\{(1, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$. Тогаш $R = \{(1, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ е бесконечно, а исто така е и најмалото генераторно множество. Според тоа, секое генераторно множество на G е бесконечно.

2. Опис на конечно генерирани потполугрупи од адитивната полугрупа $\mathbb{N}^n$

Во овој дел ќе биде даден основниот резултат во овој труд.

Теорема 2.1. *Една потполугрупа* G *од адитивната полугрупа* $\mathbb{N}^n$ *е конечно генерирана ако и само ако постојат вектори* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in G$, *такви што* G *е подмножество од конусот генериран со* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$.

Доказ. Ова својство ќе го докажеме со помош на индукција, која ќе ја спроведеме по бројот n.

Доказот на случајот кога $n = 1$, односно кога G е потполугрупа од $\mathbb{N}$ е изнесен во [2] , односно тоа е **Теорема 1.1.** .

Посебно ќе го разгледаме и случајот $n = 2$, односно кога G е потполугрупа од $\mathbb{N}^2$. Ова е од интерес заради тоа што во себе ја содржи основната идеја за изведувањето на целокупниот доказ.

Кога $n = 2$, тврдењето гласи : Една потполугрупа G од адтитивната полугрупа $\mathbb{N}^2$ е конечно генерирана ако и само ако постојат вектори $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in G$, такви што G е подмножество од конусот генериран со $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$.

Ќе разгледаме два случаја: $m = 1$ и $m \geq 2$.

1^0. $m = 1$

Нека $G \subseteq \text{cone}\{x\}$ и $\mathbf{x} = (\mu, \nu) \in G$, со μ најмал таков број.

Може да ги разгледаме следните случаи:

Ако $\mu = \nu = 0$, тогаш $G = \{(0,0)\}$, што значи дека G е конечно генерирана.

Ако $\mu = 0$, $\nu \neq 0$ или $m \neq 0$, $\nu = 0$, тогаш G е изоморфна со потполугрупа од $\mathbb{N}$, која е конечно генерирана според **Теорема 1.1.**.

Нека $\mu \neq 0 \neq \nu$ и нека $\mu/\nu = \varphi$. Тогаш $\forall(a,b) \in G$ важи $b/a = \varphi$, односно $b = a\varphi$.

Дефинираме множество $H = \{a \mid a \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, (a, a\varphi) \in G\}$. Тогаш, според **Теорема 1.1.**, H е конечно генерирана потполугрупа од $\mathbb{N}$, односно $H =< a_1, \ldots, a_s >$, за некои s и $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Според тоа, $G =< (a_1, \varphi a_1), \ldots, (a_s, \varphi a_s) >$. Значи G е конечно генерирана потполугрупа. Да забележиме дека $s \leq \mu$.

2^0. $m \geq 2$. Во овој случај $\text{cone}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\} = \text{cone}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, за некои $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$. Ако $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ се колинеарни, тогаш и овој случај се сведува на **1^0**. Затоа, нека $\mathbf{a} = (u, w)$ и $\mathbf{b} = (c, d)$ не се колинеарни. Без губење на општоста, нека $(0,0) \in G$ и нека $u \neq 0$ и $d \neq 0$. Ги воведуваме ознаките $w/u = \varphi$ и $d/c = \varphi$ $(w = \varphi u, d = \psi c)$, при што за $c = 0, \psi = \infty$. Тогаш за секој $z = (\alpha, \beta) \in G$, $\varphi \leq \beta/\alpha \leq \psi$.

На почетокот ќе го разгледаме случајот кога $w \neq 0$ и $c \neq 0$.

Дефинираме множество:

$$G_\varphi = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = (\alpha, \beta) \in G, b/\alpha = \varphi\} \subseteq \mathbb{N}^2 \tag{3}$$

Од дефиницијата следува дека $\mathbf{a} \in G_\varphi$. Нека $\mathbf{x} = (\mu, \nu) \in G_\varphi$, е елемент со најмала ненулта прва компонента μ, (Слика 1) . Тогаш: $(\forall t \in \mathbb{N})t\mathbf{x} = (t\mu, t\nu) \in G_\varphi$ и $\forall \mathbf{z} = (\alpha, \beta) \in G_\varphi$ за кој, $\alpha > \mu$, $t\mathbf{z} = (t\alpha, t\beta) \in G_\varphi$. Исто така, за секои $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in G_\varphi$, $\mathbf{z} + \mathbf{w} \in G_\varphi$. Значи $G_\varphi \subseteq \text{cone}\{x\}$ и G_φ е потполугрупа од $\mathbb{N}^2$. Доказот на следната **Лема 2.1.** следува директно од **1^0**, каде што $m = 1$.

Лема 2.1. *Потполугрупата G_φ (дефинирано со (3)) е конечно генерирано.* □

Потоа симетрично, дефинираме множество:

$$G_\psi = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = (\alpha, \beta) \in G,\ \beta/\alpha = \psi\} \subseteq \mathbb{N}^2. \tag{4}$$

Нека $\mathbf{y} = (p, q) \in G_\varphi$, е вектор со најмала ненулта втора компонента q, (Слика 1) . На аналоген начин како погоре се докажува дека G_ψ е потполугрупа од $\mathbb{N}^2$ и дека е точна следната:

Лема 2.2. *Потполугрупата G_ψ е конечно генерирано.*

Нека сега претпоставиме дека $G \subseteq \mathbb{N}^2$, $G \subseteq \text{cone}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, е бесконечно генерирана потполугрупа. Нека постои множество генератори

$X = \{\mathbf{x}_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, така што $\mathbf{x}_i \notin < \{\mathbf{x}_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \setminus \mathbf{x}_i\} >$. Според **Лема 2.1.** и **Лема 2.2.** потполугрупите G_φ и G_ψ се конечно генерирани, т.е. во секое од множествата G_φ и G_ψ има конечно многу елементи од X.

Од $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$, следува дека на потполугрупата G и припаѓаат и елементите од видот:

$\tau\mathbf{x} + \sigma\mathbf{y} = \tau(\mu, \nu) + \sigma(p, q) = (\tau\mu + \sigma p, \tau\nu + \sigma q)$.

Бидејќи $\mathbf{x} = (\mu, \nu)$ и $\mathbf{y} = (p, q)$ се линеарно независни, односно $\varphi \neq \psi$, елементите од овој вид се совпаѓаат со темињата на паралелограми распоредени во внатрешноста на cone$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.

Нека секој таков паралелограм го означиме со, $T^2_{\tau\sigma}$, (Слика 1), каде што темињата на паралелограмот се во точките:

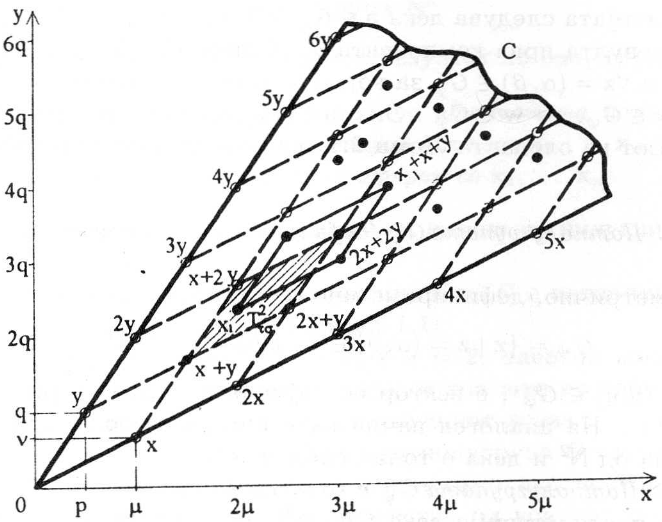
$$\tau\mathbf{x} + \sigma\mathbf{y}, (\tau + 1)\mathbf{x} + \sigma\mathbf{y}, \tau\mathbf{x} + (\sigma + 1)\mathbf{y} \text{ и } (\tau + 1)\mathbf{x} + (\sigma + 1)\mathbf{y}.$$

Прв чекор: Да претпоставиме дека $\mathbf{x}_1 \in X \cap G$, таков што $x_1 = (\mu_1, \nu_1)$, $\mu_1 > \mu$ и $\varphi < \nu_1/\mu_1 < \psi$. Ако нема таков елемент, тогаш или $\nu_1/\mu_1 = \varphi$ или $\nu_1/\mu_1 = \psi$ или има само конечно многу елементи за кои $\mu_1 \leq \mu$.

Нека $\mu_1 > \mu$ и $\mathbf{x}_1 \in T^2_{\tau_0\sigma_0}$, $\tau_0, \sigma_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ се најмалите вредности за τ и σ, односно x_1 припаѓа на паралелограмот со темиња:

$\tau_0\mathbf{x} + \sigma_0\mathbf{y}, (\tau_0 + 1)\mathbf{x} + \sigma_0\mathbf{y}, \tau_0\mathbf{x} + (\sigma_0 + 1)\mathbf{y}$ и $(\tau_0 + 1)\mathbf{x} + (\sigma_0 + 1)\mathbf{y}$.

Елементи од видот $\mathbf{x}_1 + \gamma\mathbf{x} + \delta\mathbf{y}$, γ, $\delta \geq 0$, има во сите други паралелограми $T^2_{\tau\sigma}$ за кои $\tau \geq \tau_0$ и $\sigma \geq \sigma_0$.



Слика 1

Втор чекор: Да го разгледаме елементот $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 + \gamma(\mu, \nu) + \delta(p, q)$, $\mathbf{x}_2 \in G$. Постојат две можности. Елементот $\mathbf{x}_2$ може да припаѓа на паралелограмот $T^2_{\tau_0\sigma_0}$, што претходно го разгледавме, или да припаѓа на некој нов паралелограм $T^2_{\tau'\sigma'} \neq T^2_{\tau_0\sigma_0}$, каде $\tau' \geq \tau_0$, $\sigma' \geq \sigma_0$ и $\tau', \sigma' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Ако $\mathbf{x}_2 \in T^2_{\tau_0\sigma_0}$, тогаш елементи од видот $\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x} + \delta\mathbf{y}$ има во секој од останатите паралелограми за кои $\tau > \tau_0$ и $\sigma > \sigma_0$.

Ако пак $\mathbf{x}_2 \in T^2_{\tau'\sigma'}$, тогаш елементи од видот $\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x} + \delta\mathbf{y}$ има во сите паралелограми за кои $\tau > \tau' \geq \tau_0$ и $\sigma > \sigma' \geq \sigma_0$.

Во наредниот чекор би се разгледал елементот $\mathbf{x}_3$, потоа $\mathbf{x}_4$ и т.н. Постапката би требало да продолжи до бескрајност. Меѓутоа, познато е дека секој од паралелограмите има конечно многу целобројни точки. Според тоа, постапката (за разгледување на нови генератори) ќе застане после конечно многу чекори, а ова противречи на претпоставката дека G е бесконечно генерирана потполугрупа.

За да го комплетираме доказот на **Теорема 2.1**, за $n = 2$, треба да ги разгледаме и следните специјални случаи:

1^0. $\varphi = 0$ и $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$, **2**^{0}. $\varphi \in \mathbb{R}, \varphi > 0$ и $\psi = \infty$ и **3** ^{0}. $\varphi = 0$ и $\psi = \infty$.

1^0. За $\varphi = 0$ и $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$, множеството G_φ го дефинираме со :

$$G_\varphi := \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = (\alpha, \beta) \in G,\ \beta/\alpha = 0\} = \{z \mid z = (\alpha, 0) \in G\} \subseteq \mathbb{N}^2 \tag{5}$$

а множеството G_ψ со (4). За овие две множества G_φ и G_ψ, точни се тврдењата изнесени во **Лема 2.1.** и **Лема 2.2.**, односно тие се конечно генерирани потполугрупи од $\mathbb{N}^2$. Останатиот дел од доказот е ист со доказот изнесен во претходното разгледување. Паралелограмите се со една страна паралелна на x- оската.

2^0. За $\varphi \in \mathbb{R}, \varphi > 0$, и $\psi = \infty$, множеството G_ψ го дефинираме со :

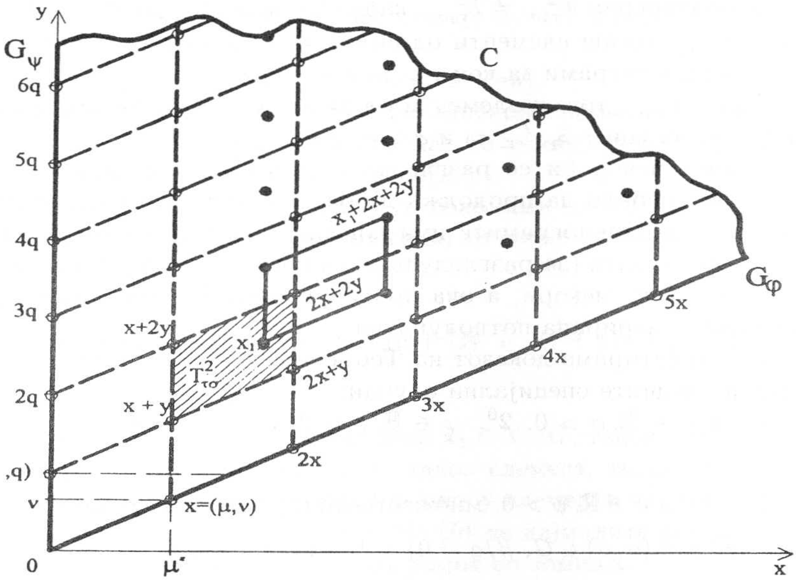
$$G_\psi := \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = (0, \beta) \in G\} \subseteq \mathbb{N}^2. \tag{6}$$

За множествата G_φ и G_ψ, точни се тврдењата изнесени во **Лема 2.1.** и **Лема 2.2.** (соодветно). Доказите се исти и за овој случај, користејќи ги горе наведените дефиниции за множествата. Делот од доказот во кој се користат паралелограмите е ист, односно се повторува, со тоа што овие паралелограми имаат по една страна паралелна со y- оската, што може да се види на (Слика 2).

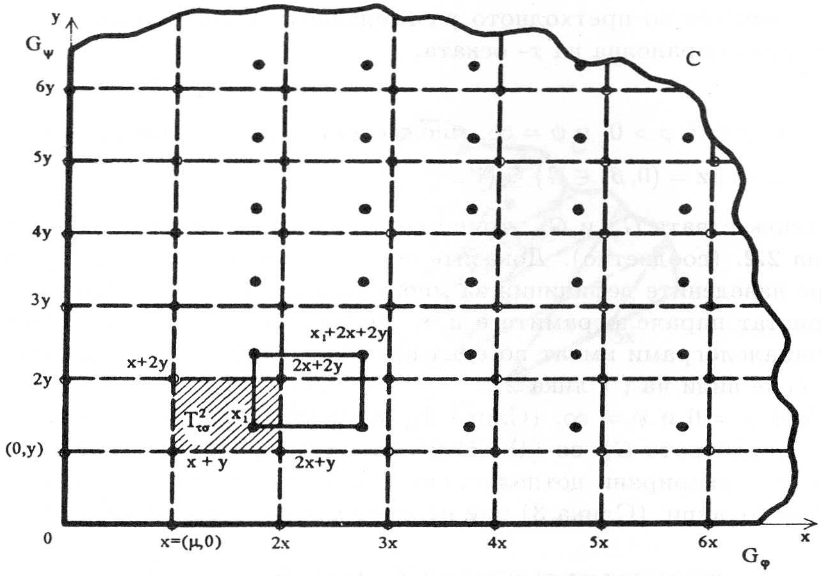
3^0 Ако $\varphi = 0$ и $\psi = \infty$, (Слика 3), множеството G_φ е дефинирано со (5), а множеството G_ψ со (4). И во овој случај множествата G_φ и G_ψ се конечно генерирани потполугрупи. Паралелограмите во овој случај се правоаголници, (Слика 3) чии страни се паралелни со координатните оски.

Во досегашниот дел од доказот на **Теорема 2.1.** беа изнесени доказите за $n = 1$ и $n = 2$. Сега да се вратиме на понатамошното изведување на доказот со индукција.

Димензија на конвексен многустран конус е димензијата на минималниот подпростор во кој се содржи конусот.



Слика 2 $(\varphi = 3, \psi = \infty)$



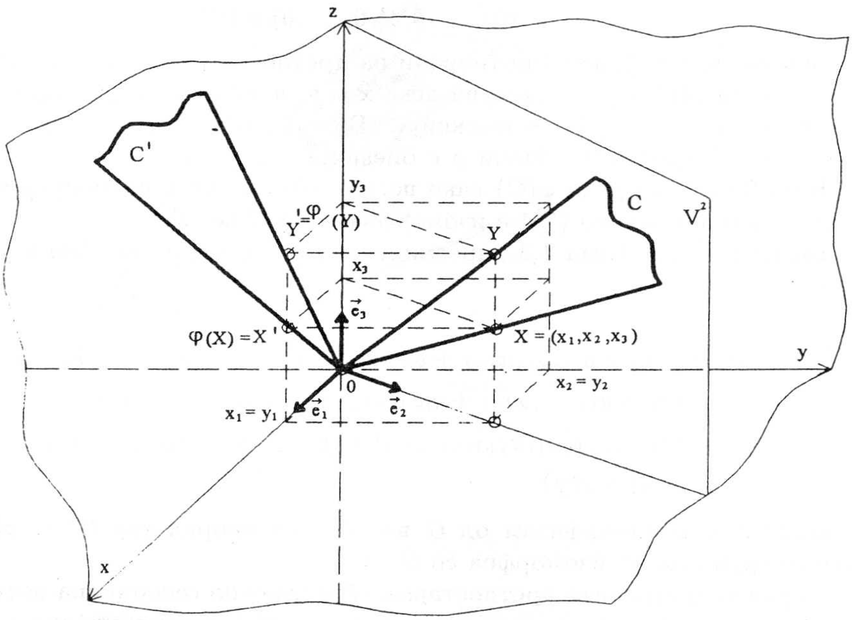
Слика 3 $(\varphi = 0, \psi = \infty)$

Да претпоставиме дека тврдењето во **Теорема 2.1.** е точно за $n \leq k$, т.е. потполугрупата $G \subseteq \mathbb{N}^k$ е конечно генерирана, ако и само ако постојат вектори $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in G$, такви што $G \subseteq \text{cone}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\} = C$, $(\dim C = k$, каде што $\mathbf{x}_i \in G$, $(i = 1, \ldots, m)$ и $\mathbf{x}_i = (x_1^i, \ldots, x_k^i)$.

Треба да се докаже тврдењето за $n = k + 1$.

Нека $G \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ и нека $\mathbf{x}_i \in G$, $(i = 1, \ldots, m)$, $\mathbf{x}_i = (x_1^i, \ldots, x_{k+1}^i)$ и $G \subseteq C$, каде што $C = \text{cone}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$. Може да се разгледаат следните три случаи: $m < n$, $m = n$ и $m > n$.

Прв случај: $m < n = k + 1$, $\dim C \leq m < k + 1$, (Слика 4).



Слика 4. $(m < n, n = 3, m = 2)$

Нека V^m е векторски потпростор од $\mathbb{R}^n$, при што база на $\mathbb{R}^n$ е:

$$< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >, \mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1^i, 0, \ldots, 0), \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и притоа $C \subset V^m \subseteq \mathbb{R}^n$, така што постои $\mathbf{e}_i \notin C$.
Дефинираме пресликување $\varphi : G \to \mathbb{N}^k$ со:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n) \\ &= (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n) \end{aligned} \tag{7}$$

Лема 2.3. Нека $G' = \varphi(G)$. Пресликувањето $\varphi : G \to G'$ дефинирано со (7) е биекција.

Доказ: Нека $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C \subset V^m$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$ за кои $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $\varphi(\mathbf{y}) = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ и $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$. Тогаш, од (7) следува:

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n).$$

Ако $x_i \neq y_i$, нека $x_i > y_i$, односно $x_i - y_i = t$, $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Бидејќи $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^m \subseteq \mathbb{R}^n$, следува дека и $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in V^m \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогаш:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{y} &= (0, \dots, 0, x_i - y_i, 0, \dots, 0) \\ &= (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) \\ &= t(0, \dots, 0, 1^i, 0, \dots, 0) \in V^m, \end{aligned}$$

односно $t\mathbf{e}_i \in V^m$, што противречи на претпоставката дека $\mathbf{e}_i \in V^m$.

Значи, од $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$ следува дека $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, а тоа значи дека пресликувањето $\varphi : G \to G' \subseteq \mathbb{N}^k$ е ињекција. Бидејќи $G' = \varphi(G)$, следува дека $\varphi : G \to G'$ е сурјекција. Значи φ е биекција. □

Лема 2.4. Нека $G' = \varphi(G)$ како погоре. Тогаш G' е потполугрупа од $\mathbb{N}^k$ и φ (дефинирано со (7)) е изоморфизам од G во G'.

Доказ: Според **Лема 2.3.**, пресликувањето φ е биекција. Ако $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$, тогаш:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \varphi(x_1 + y_1, \dots, x_{i-1} + y_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1} + y_{i+1}, \dots, x_n + y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_{i-1} + y_{i-1}, x_{i+1} + y_{i+1}, \dots, x_n + y_n) \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \\ &= \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Значи φ е хомоморфизам од G во $\mathbb{N}^k$, па според тоа $G' = \varphi(G)$ е потполугрупа од $\mathbb{N}^k$ изоморфна со G . □

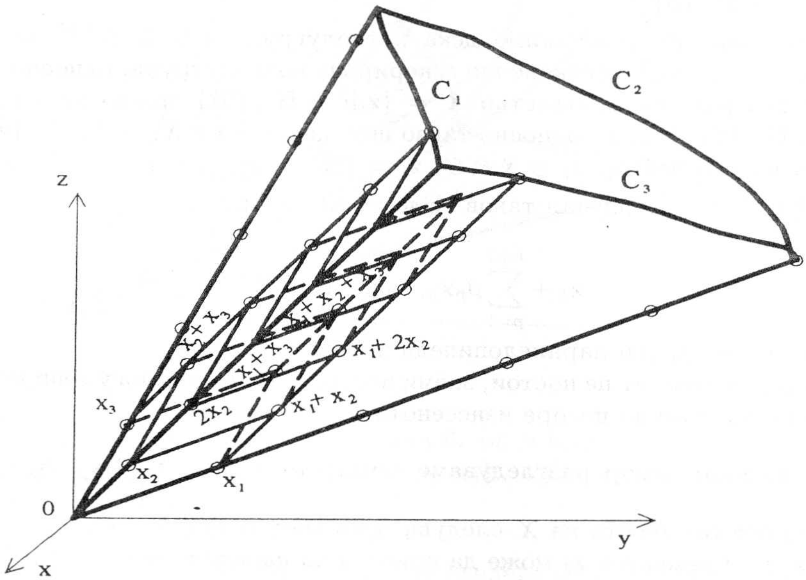
Според индуктивната претпоставка, G' е конечно генерирана потполугрупа. Бидеји G и G' се изоморфни, следува дека и потполугрупата G е конечно генерирана.

Втор случај: $m = n = k + 1$. Ако $\dim C < n$, тогаш дискусијата се сведува на првиот случај. Затоа нека $\dim C = n$. Тогаш постојат независни вектори

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in G \subseteq \mathbb{N}^{k+1}, \;\; \mathbf{x}_i = (x_1^i, \dots, x_n^i), \;\; (i = 1, \dots, n = k + 1),$$

такви што $G \subseteq \text{cone}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, (Слика 5).

На почеток ќе ги разгледаме потполугрупите од G, со својството $G_j \subseteq C_j$, каде што $C_j = \text{cone}\{\mathbf{x}_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n\}$, $(j = 1, \dots, n)$, $G_j = G \cap C_j$. Вакви потполугрупи има $n = k + 1$. Секоја од овие потполугрупи $G_j \subseteq \mathbb{N}^k$ и за нив важи тврдењето од **првиот случај**, односно потполугрупите од овој вид се конечно генерирани.



Слика 5. $(m = n, n = 3, m = 3)$

Паралелопипед T^{k+1} со димензија $k+1$ се добива како паралелопипед со основа паралелопипед T^k со димензија k и еден раб $\mathbf{x}$ со димензија еден, односно

$$T^{k+1} = (T^k \cup (T^k + \mathbf{x})) \cap \mathbb{N}^k, \text{каде што } T^k + \mathbf{x} = \{\mathbf{y} + \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \in T^k\}.$$

На почетокот на **вториот случај** напомнавме дека постојат вектори $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in G \subseteq \mathbb{N}^{k+1}, \mathbf{x}_i = (x_1^i, \ldots, x_n^i), (i = 1, \ldots, n)$, такви што $G \subseteq \operatorname{cone}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Тогаш од:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n &= \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_{k+1} \\
&= (x_1^1, \ldots, x_{k+1}^1) + \cdots + (x_1^{k+1}, \ldots, x_{k+1}^{k+1}) \\
&= (x_1^1 + \cdots + x_1^{k+1}, \ldots, x_{k+1}^1 + \cdots + x_{k+1}^{k+1}) \in G,
\end{aligned}$$

и бидејќи $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ се независни, следува дека на потполугрупата G и припаѓаат и елементите од видот $\sum_{p=1}^{k+1} \alpha_p \mathbf{x}_p$, $\alpha_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, кои се совпаѓаат со страните со минимална димензија - темиња на паралелопипедите распоредени во внатрешноста на $\mathrm{cone}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Секој таков паралелопипед го означуваме со $T^{k+1}_{\sigma_p}, \sigma_p \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{k+1}$.

Потоа, нека претпоставиме дека потполугрупата $G \subseteq N^{k+1}$ за која $G \subseteq \mathrm{cone}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ е бесконечно генерирана потполугрупа, односно дека постои генераторно множество $X = \{\mathbf{z}_i | i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, такво што $\mathbf{z}_j \notin < \{\mathbf{z}_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \setminus \{\mathbf{z}_j\} >$, односно такво што за секој $\mathbf{z} \in X$, $\mathbf{z} \notin < X \setminus \{\mathbf{z}\} >$.

Нека постои вектор $\mathbf{z}_1 \in X \cap G$, $\mathbf{z}_1 = (z_1^1, \ldots, \mathbf{z}_{k+1}^1)$ и $\mathbf{z}_1 \in T^{k+1}_{\sigma_{p_0}}$, $\sigma_{p_0} \in (N \setminus \{0\})^{k+1}$ и σ_{p_0} е најмал таков. Елементи од видот

$$\mathbf{z}_1 + \sum_{p=1}^{k+1} \beta_p \mathbf{x}_p, \quad \beta_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

има во сите други паралелопипеди за кои $\sigma_p \geq \sigma_{p_0}$.

Ако таков елемент не постои, значи постојат конечно многу генератори за кои стана збор во погоре изнесеното.

Во следниот чекор разгледуваме вектор $\mathbf{z}_2 \neq \mathbf{z}_1 + \sum_{p=1}^{k+1} \beta_p \mathbf{x}_p$, $\beta_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Од бесконечноста на X следува дека постои $\mathbf{z}_2 \in X \cap G$, таков што $\mathbf{z}_2 \notin < \mathbf{z}_1 >$. Елементот $\mathbf{z}_2$ може да припаѓа на паралелопипедот $T^{k+1}_{\sigma_{p_0}}$ што претходно го разгледувавме, или на некој нов паралелопипед $T^{k+1}_{\sigma_{p_1}} \neq T^{k+1}_{\sigma_{p_0}}$ за $\sigma_{p_1} \geq \sigma_{p_1}$ и σ_{p_1} најмал.

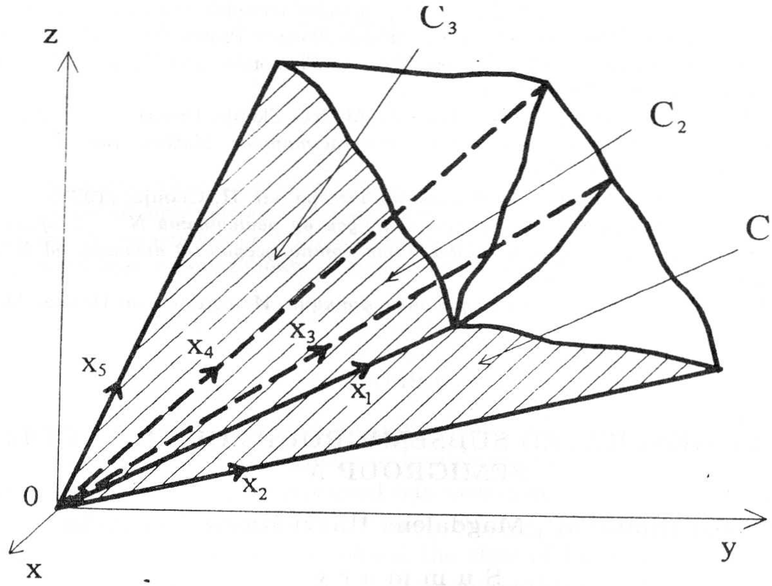
Ако $\mathbf{z}_2 \in T^{k+1}_{\sigma_{p_0}}$, тогаш елементи од видот $\mathbf{z}_2 + \sum_{p=1}^{k+1} \beta_p \mathbf{x}_p$, $\beta_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ има во секој од останатите паралелопипеди $T^{k+1}_{\sigma_p}$ за кои $\sigma_p \geq \sigma_{p_0}$.

Ако $\mathbf{z}_2 \in T^{k+1}_{\sigma_{p_1}}$, тогаш елементи од видот $\mathbf{z}_2 + \sum_{p=1}^{k+1} \beta_p \mathbf{x}_p$, $\beta_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ има во секој од останатите паралелопипеди $T^{k+1}_{\sigma_p}$ за кои $\sigma_p \geq \sigma_{p_1} \geq \sigma_{p_0}$.

Постапката треба да продолжи со разгледување на наредниот елемент $\mathbf{z}_3$, и т.н., до бескрајност. Меѓутоа познато е дека секој од паралелопипедите $T^{k+1}_{\sigma_p}$, има конечно многу целобројни точки, (кои соотвецтвуваат на целобројни вектори).

Според тоа постапката за разгледување на нови елементи - генератори, ќе застане после конечно многу чекори. Ова противречи на претпоставката дека G е бесконачно генерирана потполугрупа од $\mathbb{N}^{k+1}$.

Трет случај: $m > n = k + 1$. (Слика 6)



Слика 6. $(m > n, n = 3, m = 5)$

$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$; $C_1 = \text{cone}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$; $C_2 = \text{cone}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$; $C_3 = \text{cone}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$;

Ако $\dim C < n$,тогаш дискусијата се сведува на првиот случај . Затоа нека $\dim C = n$. Бидејќи $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in G$, $G \subseteq \text{cone}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\} = C$ и $m > n = k+1$, многустраниот конус C, може да се претстави како унија од $(m-k)$ конуси C_i, $(i = 1, \ldots, m-k)$, генерирани од по $k+1$ вектори, односно $C = \bigcup_{i=1}^{m-k} C_i$, $\dim C_i = k + 1$. Потполугрупата G може да се претстави како унија од потполугрупи G_i , односно $G = \bigcup_{i=1}^{m-k} G_i$, каде што $G_i \subseteq C_i$, $(i = 1, \ldots, m - k)$. Секоја од овие потполугрупи G_i е конечно генерирана, според вториот случај, (за $m = k + 1$). Според тоа и нивната унија е конечно генерирана.

Со целокупната досегашна дискусија е докажана едната насока од **Теоремата 2.1.**

Обратната насока е тривијална, бидејќи секоја потполугрупа од адитивната полугрупа $\mathbb{N}^n$ генерирана со конечно многу вектори е содржана во конусот генериран со тие конечно многу вектори.

References

[1] Bachem A., *The theorem of Minkowski for polyhedral monoids and aggregated linear diophantine systems, in Optimization and Operations Research* Proceedings of a Workshop held at the University of Bonn, 1977, Lecture Notes in Ekonomics and Mathematical Systems **157**, Springer, Berlin, (1978),1 - 13.

[2] Dimovski D., *Aditivni polugrupi na celi broevi*, MANU, Skopje, Prilozi, **IX**, **2**, 1977.

[3] Jeroslow R. G., *Some basic theorems for integral monoids*, Mathematics of Operations Research, **3** , (1978), 145 - 154.

[4] Чупона Ѓ., Трпеновски Б., *Предавања по алгебра*, кн. **II**, Скопје, (1973).

[5] Хаџи-Коста Јосифовска М., *Многустрани конуси во решетката N^n (со примена во целобројното програмирање и адитивните потполугрупи од вектори од N^n)*, докторска дисертација, Скопје, 2000.

[6] А.И.Мальцев, *Алгоритмы и рекурсивные функции*, Издательство Наука, Москва, 1965.

FINITELY GENERATED SUBSEMIGROUPS OF THE ADDITIVE SEMIGROUP N^n

Dončo Dimovski*, Magdalena Hadži-Kosta Josifovska**

S u m m a r y

In this paper we give a geometric description of finitely generated subsemigroups of the additive semigroup $\mathbb{N}^n$.

The main result of this paper is the following:

T.2.1 A subsemigroup G of the additive semigroup $\mathbb{N}^n$ is finitely generated, if and only if there are elements $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ of G, such that G is a subset of the cone generated by $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$.

*)Faculty of Natural Sciences and Mathematics, P.O. Box 162, 1000 Skopje, Macedonia

E-mail address: donco@iunona.pmf.ukim.edu.mk

**)Tehnicki fakultet, 4700 Bitola, Makedonija