Математички Билтен
13 (XXXIX)
1989 (59-64)
Скопје, Југославија

НЕКОЛКУ НЕРАВЕНСТВА ЗА АГЛИТЕ ВО ТРИАГОЛНИКОТ

Ж. Мадевски, А. Самарџиски

Ќе докажеме неколку неравенства што се точни за аглите во триаголникот. Во случаите на неравенство од типот $\leq$ ($\geq$), еднаквоста важи кога $\alpha=\beta=\gamma=60^{\circ}$.

1. Ако α,β и γ се агли на некој остроаголен триаголник, тогаш точно е неравенството

$$\sin^{2^n}\alpha + \sin^{2^n}\beta + \sin^{2^n}\gamma > 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Доказ. Доказот ќе го спроведеме вршејќи индукција по n. За $n = 1$, неравенството се сведува на (GI; 2.3):

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 2.$$

Да претпоставиме дека неравенството е точно за n. Бидејќи

$$(x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n})^2 \leq 3(x^{2^{n+1}} + y^{2^{n+1}} + z^{2^{n+1}}),$$

ставајќи $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$, $z = \sin\gamma$, добиваме

$$\sin^{2^{n+1}}\alpha + \sin^{2^{n+1}}\beta + \sin^{2^{n+1}}\gamma \geq$$
$$\geq \frac{1}{3}(\sin^{2^n}\alpha + \sin^{2^n}\beta + \sin^{2^n}\gamma)^2 >$$
$$> \frac{1}{3}\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(3^2\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n},$$

со што неравенството е докажано.

2. Ако α,β и γ се агли на кој било триаголник, тогаш за $n\in\mathbb{N}^0$, точно е неравенството

$$\sin^{2^{-n}}\alpha + \sin^{2^{-n}}\beta + \sin^{2^{-n}}\gamma \leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^{2^{-(n+1)}}.$$

Доказ. Доказот ќе го спроведеме вршејќи индукција по n. За $n = 0$, неравенството се сведува на (GI; 2.2):

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Да претпоставиме дека неравенството е точно за n. Бидејќи

$$(x^{2^{-n-1}}+y^{2^{-n-1}}+z^{2^{-n-1}})^2 \le 3(x^{2^{-n}}+y^{2^{-n}}+z^{2^{-n}}),$$

ставајќи $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$, $z = \sin\gamma$, добиваме

$$(\sin^{2^{-(n+1)}}\alpha + \sin^{2^{-(n+1)}}\beta + \sin^{2^{-(n+1)}}\gamma)^2 \le$$

$$3(\sin^{2^{-n}}\alpha + \sin^{2^{-n}}\beta + \sin^{2^{-n}}\gamma \le 3^2(\tfrac{3}{4})^{2^{-(n+1)}},$$

т.е.

$$\sin^{2^{-(n+1)}}\alpha + \sin^{2^{-(n+1)}}\beta + \sin^{2^{-(n+1)}}\gamma \le 3(\tfrac{3}{4})^{2^{-(n-1)}}$$

со што неравенството е докажано.

Забелешка. Ако триаголникот е тапоаголен, тогаш

$$\sin^{2^{-n}}\alpha + \sin^{2^{-n}}\beta + \sin^{2^{-n}}\gamma < 3(\tfrac{1+\sqrt{2}}{3})^{2^{-n}}$$

3. За аглите α,β и γ на кој било триаголник, точни се неравенствата

(а) $$0 < \sqrt{3}\ \Sigma \cos\frac{\beta-\gamma}{3} \pm \Sigma \sin\frac{\beta-\gamma}{3} \le 3\sqrt{3},$$

(б) $$2 < \Sigma \cos\frac{\beta-\gamma}{3} \pm \sqrt{3}\ \Sigma \sin\frac{\beta-\gamma}{2} \le 3.$$

Доказ. Ако α,β и γ се агли на триаголник, тогаш и аглите

$$\alpha_1 = \frac{\alpha+2\beta}{3},\quad \beta_1 = \frac{\beta+2\gamma}{3},\quad \gamma_1 = \frac{\gamma+2\alpha}{3},$$

односно

$$\alpha_2 = \frac{\alpha+2\gamma}{3},\quad \beta_2 = \frac{\beta+2\alpha}{3},\quad \gamma_2 = \frac{\gamma+2\beta}{3}$$

се агли на триаголник, што лесно се проверува.

Да ги пресметаме

$$\sin\alpha_1 = \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\beta-\gamma}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{3},$$

$$\cos\alpha_1 = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\beta-\gamma}{3}) = \frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{3};$$

аналогно ги определуваме: $\sin\beta_1$, $\cos\beta_1$; $\sin\gamma_1$, $\cos\gamma_1$, како и $\sin\alpha_2$, $\cos\alpha_2$, $\sin\beta_2$, $\cos\beta_2$, $\sin\gamma_2$, $\cos\gamma_2$.

Заменувајќи ги аглите α_1, β_1, γ_1 во (GI; 2.1) се добива следново неравенство

$$(a_1) \qquad 0 < \sqrt{3}\ \Sigma\ \cos\frac{\beta-\gamma}{3} + \Sigma\ \sin\frac{\beta-\gamma}{3} \leq 3\sqrt{3},$$

односно во (GI; 2.16)

$$(б_1) \qquad 2 < \Sigma\ \cos\frac{\beta-\gamma}{3} - \sqrt{3}\ \Sigma\ \sin\frac{\beta-\gamma}{3} \leq 3.$$

Аналогно, заменувајќи ги аглите α_2, β_2, γ_2 во истите неравенства, ги добиваме неравенствата

$$(a_2) \qquad 0 < \sqrt{3}\ \Sigma\ \cos\frac{\beta-\gamma}{3} + \Sigma\sin\frac{\beta-\gamma}{3} \leq 3\sqrt{3},$$

$$(б_2) \qquad 2 < \Sigma\ \cos\frac{\beta-\gamma}{3} - \sqrt{3}\ \Sigma\ \sin\frac{\beta-\gamma}{3} \leq 3.$$

Од (a_1) и (a_2), односно ($б_1$) и ($б_2$) ги добиваме неравенствата (a) и (б).

4. За аглите во секој триаголник важат неравенствата

1°. $\frac{\sqrt{2}}{4}(2+3\sqrt[3]{4}) < \cos\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\beta}{4} + \cos\frac{\gamma}{4} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$.

2°. $\frac{3\sqrt{2}}{4}(\sqrt[3]{4}-1) < \sin\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\beta}{4} + \sin\frac{\gamma}{4} < \frac{\sqrt{2}}{4}(3\sqrt{3}-1)$.

Доказ. Нека α,β и γ се агли во произволен триаголник и нека $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Бидејќи α_1, β_1, γ_1 можат да бидат агли на остроаголен триаголник, тогаш се точни неравенствата ([1], 1.2), (GI; 2.9)

$$\frac{3\sqrt[3]{4}}{2} < \cos\frac{\alpha_1}{2} + \cos\frac{\beta_1}{2} + \cos\frac{\gamma_1}{2} \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}, \qquad (1)$$

$$1 < \sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\beta_1}{2} + \sin\frac{\gamma_1}{2} \leq \frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Ако во овие неравенства ги замениме α_1, β_1, γ_1, тогаш со собирање на (1) и (2) се добива 1°, а ако второто го помножиме со -1 и пак ги собереме се добива 2°.

5. За аглите

1°. Во секој триаголник важи

$$\frac{3}{4}(2-\sqrt{3}) \leq \sin^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\beta}{4} + \sin^2\frac{\gamma}{4} < \frac{1}{2};$$

2°. Во остроаголен триаголник важи

$$\frac{3}{4}(2-\sqrt{3}) \leq \sin^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\beta}{4} + \sin^2\frac{\gamma}{4} < \frac{3}{4}(2-\sqrt[3]{4}).$$

Доказ. Ако во неравенството (GI; 2.27)

$$2 < \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}, \tag{1}$$

коешто важи за произволен триаголник, замениме

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{4}, \quad \cos\frac{\beta}{2} = 1-2\sin^2\frac{\beta}{4}, \quad \cos\frac{\gamma}{2} = 1-2\sin^2\frac{\gamma}{4},$$

го добиваме неравенството 1°.

Ако, пак, во неравенството ([1], 1.2)

$$\frac{3\sqrt[3]{4}}{2} < \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}, \tag{2}$$

коешто важи за остроаголен триаголник, ја извршиме истата земена, го добиваме неравенството 2°.

6. За аглите

1°. Во секој триаголник важи

$$\frac{5}{2} < \cos^2\frac{\alpha}{4} + \cos^2\frac{\beta}{4} + \cos^2\frac{\gamma}{4} \leq \frac{3}{4}(2+\sqrt{3});$$

2°. Во остроаголен триаголник важи

$$\frac{3}{4}(2+\sqrt[3]{4}) < \cos^2\frac{\alpha}{4} + \cos^2\frac{\beta}{4} + \cos^2\frac{\gamma}{4} \leq \frac{3}{4}(2+\sqrt{3}).$$

Доказ. Ако во неравенствата (1) и (2) од доказот 5 замениме

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} - 1, \quad \cos\frac{\beta}{2} = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1, \quad \cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1,$$

ги добиваме неравенствата 1° и 2°.

7. За аглите во секој триаголник важат неравенствата:

1°. $\frac{3}{8}[4-(1+\sqrt{3})\sqrt{2}] \leq \sin^2\frac{\alpha}{8} - \sin^2\frac{\beta}{8} + \sin^2\frac{\gamma}{8} < \frac{1}{4}[6-(3+\sqrt[3]{2})\sqrt[6]{2}]$,

2°. $\frac{1}{4}[6+(3+\sqrt[3]{2})\sqrt[6]{2}] < \cos^2\frac{\alpha}{8} + \cos^2\frac{\beta}{8} + \cos^2\frac{\gamma}{8} \leq \frac{3}{8}[4+(1+\sqrt{3})\sqrt{2}]$.

Доказ. Ако во 4, 1° замениме $\cos\frac{\alpha}{4} = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{8} = 2\cos^2\frac{\alpha}{8} - 1$, $\cos\frac{\beta}{4} = 1-2\sin^2\frac{\beta}{8} = 2\cos^2\frac{\beta}{8} - 1$, $\cos\frac{\gamma}{4} = 1-2\sin^2\frac{\gamma}{8} = 2\cos^2\frac{\gamma}{8} - 1$, ги добиваме неравенствата 1° и 2°.

8. За аглите во секој триаголник

1°. $\sin\frac{|\beta-\gamma|}{2} + \sin\frac{|\gamma-\alpha|}{2} + \sin\frac{|\alpha-\beta|}{2} < \frac{3}{2}\sqrt{3}$;

2°. $\sin\frac{|\beta-\gamma|}{2} \sin\frac{|\gamma-\alpha|}{2} \sin\frac{|\alpha-\beta|}{2} < \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Доказ. Ако a,b,c се страни на триаголникот тогаш

$$|b-c| < a.$$

Заменувајќи $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, каде што R е радиусот на опишаната кружница околу тој триаголник, се добива

$$\sin\frac{|\beta-\gamma|}{2} < \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Слично се добиваат и неравенствата

$$\sin\frac{|\gamma-\alpha|}{2} < \cos\frac{\beta}{2}, \qquad \sin\frac{|\alpha-\beta|}{2} < \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Со собирање и множење на трите последни неравенства, при што се користени познатите неравенства (GI; 2.27) и (GI; 2.28) се добиваат 1° и 2°.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[GI] O.Bottema, R.Ž.Djordjević, R.R.Janić, D.S.Mitrinović, P.M.Vasić: Geometric Inequalities, Groningen, 1969

[1] Ж.Мадевски, А.Самарџиски: Една постапка за формирање неравенства за аглите во триаголникот, Год. зборр. на ПМФ Скопје, кн. 21

SOME INEQUALITIES FOR THE TRIANGLE

Ž.Madevski, A.Samardžiski

S u m m a r y

In this paper some inequalities for the triangle are presented; in each of them equality holds for the equilateral triangle. The notation is usuall one.