ЗА ЦЕНТАРОТ НА АТРАКЦИЈАТА ВО ПРОБЛЕМОТ НА ЧЕТИРИ ТЕЛА

Живко Мадевски

Во својот труд „О општим интегралима проблема n тела", Миланковиќ го воведува поимот за центарот на атракцијата во проблемот на 3 тела, како точка во која се сечат правците на силите што дејствуваат на тие тела и кои се резултат на нивните заемни привлекувања според законот на Њутн. Во проблемот на 3 тела тој поим се наметнува природно и неговата егзистенција е сосем евидентна.

Постоењето на таква точка во најопшт случај на проблемот на n тела не може да се регистрира, освен во некои специјални случаи, кога на конфигурацијата на телата, како што ќе покажеме за $n = 4$, ѝ се наложуваат извесни услови.

Во овој труд доаѓаме до извесен критериум за егзистенција на центарот на атракцијата во проблемот на 4 тела, имено:

Правциите на силиите $\vec{P}_i$, *шио се јавуваат во ироблемоти на 4 ѿела, се сечаѿ во една ѿочка, чијашѿо йоложба може да се ойредели, кога моменѿнаѿа конфигурација го задоволува условоѿ* $s_{12}\, s_{34} = s_{13}\, s_{24} = s_{14}\, s_{23}$, *каде шѿо со* s_{ik} *се означени заемниѿе расѿојанија на соодвеѿниѿе ѿела.*

Горниот услов е потребен и доволен за просторен случај на проблемот и секој друг би бил еквивалентен со него. Истиот услов е само доволен за рамнински случај; покрај него постојат и повеќе други, како што ќе покажеме во текстот, коишто бараат и извесни релации меѓу големините на масите на телата.

Во I дел го разгледуваме прашањето за просторен случај на проблемот, во II дел за рамниски а во III ја определуваме положбата на центарот на атракцијата ако споменатиот услов е исполнет.

Најнапред да ги покажеме следниве два става:

Став 1. Ако правците на било кои три од силите $\vec{P}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ се сечат во една точка, тогаш и правецот на четвртата сила минува низ таа точка.

Доказ: На пример, правците на $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ нека се сечат во една точка и таа точка нека ја избереме за пол, во однос на кој положбите на масите (телата) m_i нека бидат определени со $\vec{r}_i$. Така би можеле да напишеме:

$$\vec{P}_1 = -\lambda_1 \vec{r}_1, \quad \vec{P}_2 = -\lambda_2 \vec{r}_2, \quad \vec{P}_3 = -\lambda_3 \vec{r}_3, \tag{0.1}$$

каде што λ_1, λ_2, λ_3 се позитивни скаларни големини.

Тргнувајќи од познатиот интеграл на површините

$$\left[\vec{r}_4, m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}\right] + \left[\vec{r}_2, m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}\right] + \left[\vec{r}_3, m_3 \frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2}\right] + \left[\vec{r}_4, m_4 \frac{d^2 \vec{r}_4}{dt^2}\right] = 0, \tag{0.2}$$

а земајќи дека $\vec{P}_i = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$ и заменувајќи ги $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ со односите (0.1), добиваме $[\vec{r}_4, \vec{P}_4] = 0$, од каде што следува дека $\vec{P}_4 = -\lambda_4 \vec{r}_4$, бидејќи ни $\vec{r}_4$ ни $\vec{P}_4$ не можат да се нули; оттука и тврдењето изнесено во ставот.

Став 2. Ниеден пар $\vec{P}_i$, $\vec{P}_k$ од силите не определува паралелни правци во просторот.

Доказ: За која и да е положба на четирите тела (ако сите не лежат во една рамнина) нивните тежишта определуваат еден тетраедар. Со оглед на природата на проблемот, т. е. дека силите $\vec{P}_i$ зависат само од заемните растојаниа на телата и дека се резултат на нивните заемни привлекувања, тие сили секогаш се насочени кон внатрешноста на тетрадарот. Оттука и следува тврдењето од ставот.

I. Просторен случај

1. Мислата дека правците на силите $\vec{P}_i$ се разминувачки правци во просторот се наметнува со самото дефинирање на проблемот и, како што ќе видиме понатаму, тие се такви, освен во посебни случаи, кога се сечат во една или два и два во две различни точки и кога е нужно да ѝ се наложат на моментната конфигурација извесни услови.

Нека, на пример, $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ се сечат во една точка R и нека положбите на масите m_i, во однос на R, бидат определени со векторите $\vec{r}_i$.

Бидејќи тогаш $\vec{P}_1 = -\lambda_1 \vec{r}_1$, $\vec{P}_2 = -\lambda_2 \vec{r}_2$, од (0.2) се добива:

$$[\vec{r}_3, \vec{P}_3] + [\vec{r}_4, \vec{P}_4] = 0.$$

Ако оваа равенка ја помножиме скаларно со $\vec{r}_3$, односно со $\vec{r}_4$, излегува $(\vec{r}_4, \vec{r}_3, \vec{P}_3) = 0$ и $(\vec{r}_3, \vec{r}_4, \vec{P}_4) = 0$, од каде што можеме да заклучиме дека $\vec{P}_3$ и $\vec{P}_4$ лежат во рамнината определена со $\vec{r}_4$ и $\vec{r}_3$, односно, земајќи во обзир дека нивните правци не се паралелни, се сечат во некоја точка Q; во таа рамнина лежи и точката R.

Нека сега точката Q се земе за пол и во однос на неа нека се определат положбите на масите m_i; на ист начин се покажува дека точката Q лежи во рамнината определена со $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$.

Ако правците на кои и да е две сили се сечат (во една точка R) тогаш се сечат правците и на другите две сили (во некоја точка Q); рамнините што притоа се определени со тие правци се пресекуваат по онаа права што минува низ спомена̄тите пресечни точки (R и Q).

2. Ќе си поставиме задача да го побараме условот за сечење на правците на две сили, како и оној кога сите четири минуваат низ една точка.

Нека ги напишеме аналитичните изрази за силите $\vec{P}_i$:

$$\vec{P}_1 = \frac{m_1 m_2}{s^3_{12}}\vec{s}_{12} + \frac{m_1 m_3}{s^3_{13}}\vec{s}_{13} + \frac{m_1 m_4}{s^3_{14}}\vec{s}_{14}$$

$$\vec{P}_2 = \frac{m_2 m_1}{s^3_{12}}\vec{s}_{21} + \frac{m_2 m_3}{s^3_{23}}\vec{s}_{23} + \frac{m_2 m_4}{s^3_{24}}\vec{s}_{24},$$

$$\vec{P}_3 = \frac{m_3 m_1}{s^3_{13}}\vec{s}_{31} + \frac{m_3 m_2}{s^3_{23}}\vec{s}_{32} + \frac{m_3 m_4}{s^3_{34}}\vec{s}_{34},$$

$$\vec{P}_4 = \frac{m_4 m_1}{s^3_{14}}\vec{s}_{41} + \frac{m_4 m_2}{s^3_{24}}\vec{s}_{42} + \frac{m_4 m_3}{s^3_{34}}\vec{s}_{43}$$

во кои се: m_i масите на посматраните тела, $\vec{s}_{ik}$ векторот на положбата на m_k во однос на m_i, $s_{ik} = |\vec{s}_{ik}|$ и гравитационата константа $f = 1$.

Земајќи во обзир дека $\vec{s}_{23} = \vec{s}_{13} - \vec{s}_{12}$, $\vec{s}_{24} = \vec{s}_{14} - \vec{s}_{12}$ и $\vec{s}_{34} = \vec{s}_{14} - \vec{s}_{13}$, горните изрази можат да се доведат во облик:

$$\begin{aligned}
\vec{P}_1 &= \frac{m_1 m_2}{s^3_{12}}\vec{s}_{12} + \frac{m_1 m_3}{s^3_{13}}\vec{s}_{13} + \frac{m_1 m_4}{s^3_{14}}\vec{s}_{14} \\
\vec{P}_2 &= -\left(\frac{m_2 m_1}{s^3_{12}} + \frac{m_2 m_3}{s^3_{23}} + \frac{m_2 m_4}{s^3_{24}}\right)\vec{s}_{12} + \frac{m_2 m_3}{s^3_{23}}\vec{s}_{13} + \frac{m_2 m_4}{s^3_{24}}\vec{s}_{14} \\
\vec{P}_3 &= \frac{m_3 m_2}{s^3_{23}}\vec{s}_{12} - \left(\frac{m_3 m_1}{s^3_{13}} + \frac{m_3 m_2}{s^3_{23}} + \frac{m_3 m_4}{s^3_{34}}\right)\vec{s}_{13} + \frac{m_3 m_4}{s^3_{34}}\vec{s}_{14} \\
\vec{P}_4 &= \frac{m_4 m_2}{s^2_{24}}\vec{s}_{12} + \frac{m_4 m_3}{s^3_{34}}\vec{s}_{13} - \left(\frac{m_4 m_1}{s^3_{14}} + \frac{m_4 m_2}{s^3_{24}} + \frac{m_4 m_3}{s^3_{34}}\right)\vec{s}_{14}.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Ако за почеток 0 на една афина координатна система во просторот ја земеме положбата на масата m_1, а векторите $\vec{s}_{12} = \vec{e}_1$, $\vec{s}_{13} = \vec{e}_2$, $\vec{s}_{14} = \vec{e}_3$ за координатни вектори, тогаш равенките на правците p_1, p_2, p_3, на силите $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, ќе гласат:

$$p_1 : \frac{x_1}{\frac{m_2}{s^3_{12}}} = \frac{x_2}{\frac{m_3}{s^3_{13}}} = \frac{x_3}{\frac{m_4}{s^3_{14}}}$$

$$p_2 : \frac{x_1 - 1}{-\left(\frac{m_1}{s^3_{12}} + \frac{m_3}{s^3_{23}} + \frac{m_4}{s^3_{24}}\right)} = \frac{x_2}{\frac{m_3}{s^3_{23}}} = \frac{x_3}{\frac{m_4}{s^3_{24}}}$$

$$p_3 : \frac{x_1}{\frac{m_2}{s^3_{23}}} = \frac{x_2 - 1}{-\left(\frac{m_1}{s^3_{13}} + \frac{m_2}{s^3_{23}} + \frac{m_4}{s^3_{34}}\right)} = \frac{x_3}{\frac{m_4}{s^3_{34}}}.$$

Потребниот и доволен услов за тоа, непаралелните прави p_1, p_2 да се сечат се добива од следнава релација:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{m_2}{s^3_{12}} & \frac{m_3}{s^3_{13}} & \frac{m_4}{s^3_{14}} \\ -\left(\frac{m_1}{s^3_{12}} + \frac{m_3}{s^3_{23}} + \frac{m_4}{s^3_{24}}\right) & \frac{m_3}{s^3_{23}} & \frac{m_4}{s^3_{24}} \end{vmatrix} = 0,$$

од каде што непосредно следува:

$$m_3 m_4 \begin{vmatrix} \frac{1}{s^3_{13}} & \frac{1}{s^3_{14}} \\ \frac{1}{s^3_{23}} & \frac{1}{s^3_{24}} \end{vmatrix} = 0,$$

односно

$$s_{13}\, s_{24} = s_{14}\, s_{23}. \qquad (1.2)$$

Значи: правците на силите $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ ќе се сечат ако, и само ако, е исполнето (1.2); уште повеќе: дали правците на силите $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ ќе се сечат воопшто не зависи од тоа дали постојат некои односи меѓу големините на масите на телата или не, туку само од нивните меѓусебни растојанија.

На наполно ист начин може да се дојде до условот

$$s_{13}\ s_{24} = s_{12}\ s_{34}, \tag{1.3}$$

кој е потребен и доволен правците на силите $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ да се сечат, односно до условот:

$$s_{12}\ s_{34} = s_{14}\ s_{23}, \tag{1.4}$$

кој е потребен и доволен правците на силите $\vec{P}_3$ и $\vec{P}_1$ да се сечат.

Бидејќи во ниеден момент споменатите правци не се паралелни два по два, ниту пак, со оглед на проблемот, сите три припаѓаат на една рамнина (оти во спротивен случај тие ќе треба да лежат во рамнината определена со положбите на масите m_1, m_2, m_3 — а тоа повлекува маста на четвртото тело да биде нула), тоа значи дека ако правците на силите $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ се сечат два по два, тоа може да биде само во една точка која е заедничка за сите три и притоа нужно се доаѓа до релацијата:

$$s_{12}\ s_{34} = s_{13}\ s_{24} = s_{14}\ s_{23}. \tag{1.5}$$

Следејќи ги горните објасненија и тоа дека од (1.5) непосредно следуваат релациите (1.2), (1.3) и (1.4), очигледно е дека релацијата (1.5) претставува и доволен услов за тоа трите правци p_1, p_2 и p_3 да минуваат низ една точка.

Земајќи го ставот 1. во обзир може да се искаже следното: *потребен и доволен услов за тоа правците на силите $\vec{P}_i$, во проблемот на 4 тела, да минуваат низ една точка, при просторна конфигурација на телата, е нивните заемни растојанија да ја задоволуваат релацијата (1.5).*

Можеме да споменеме и дека *не може да постои друг услов кој не ќе биде еквивалентен на овој; никаква врска меѓу големините на масите m_i на телата не може да доведе до сечење на правците на силите $\vec{P}_i$, а притоа да не биде исполнета релацијата (1.5).*

II. Рамнински случај

1. Каква и да е положбата што ја заземаат четирите тела во рамнината, секогаш може да се издвојат три од нив m_i, m_j, m_k, така што четвртото m_l да биде во внатрешноста на ориентираниот агол $\langle \vec{s}_{ij}, \vec{s}_{ik} \rangle$, т. е. аглите $\langle \vec{s}_{ij}, \vec{s}_{il} \rangle$ и $\langle \vec{s}_{ik}, \vec{s}_{il} \rangle$ да имаат спротивни ориентации, не исклучувајќи ја можноста едниот од нив да е нула.

На пример, таков нека биде четириаголникот $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$, т.е. масата m_3 да биде во внатрешноста на аголот $\langle \vec{s}_{12}, \vec{s}_{14} \rangle$, и нека конструираме една рамнинска афина координатна систем чиј почеток 0 да биде во положбата на m_1, а соодветните координатни вектори да се $\vec{e}_1 = \vec{s}_{12}$, $\vec{e}_2 = \vec{s}_{14}$.

Положбата на m_3 нека ја одбележиме со векторот $\vec{s}_{13}$, чиишто координати, во однос на $(0;\ e_1,\ e_2)$, нека се $\{\lambda,\ \mu\}$, т.е. $\vec{s}_{13} = \lambda\vec{s}_{12} + \mu\vec{s}_{14}$. Параметрите λ и μ не можат да бидат негативни и ни дозволуваат да дискутираме за обликот на конфигурацијата; на пример:

за $\lambda = 0$ (или $\mu = 0$, односно $\lambda + \mu - 1 = 0$) имаме колинеарна распоредба на три од четирите тела;

за $\lambda = 1$ (или $\mu = 1$) четириаголникот е трапез, а кога $\lambda = \mu = 1$ – паралелограм;

за $\lambda = \mu$ и $s_{12} = s_{14}$ четириаголникот е делтоид;

за $\lambda + \mu - 1 > 0$, односно $\lambda + \mu - 1 < 0$ конфигурацијата е конвексен, односно конкавен четириаголник; итн.

2. Ако земеме дека $\vec{s}_{13} = \lambda\vec{s}_{12} + \mu\vec{s}_{14}$, тогаш аналитичните изрази (1.1) на силите $\vec{P}_i$ можеме да ги напишеме:

$$
\begin{aligned}
\vec{P}_1 &= \left(\frac{m_1 m_2}{s^3_{12}} + \lambda\frac{m_1 m_3}{s^3_{13}}\right)\vec{s}_{12} + \left(\frac{m_1 m_4}{s^3_{14}} + \mu\frac{m_1 m_3}{s^3_{13}}\right)\vec{s}_{14},\\
\vec{P}_2 &= -\left(\frac{m_2 m_1}{s^3_{12}} + \frac{m_4 m_2}{s^3_{24}} + (1-\lambda)\frac{m_2 m_3}{s^3_{23}}\right)\vec{s}_{12} + \left(\frac{m_2 m_4}{s^3_{24}} + \mu\frac{m_2 m_3}{s^3_{23}}\right)\vec{s}_{14},\\
\vec{P}_3 &= -\left(\frac{m_3 m_1}{s^3_{13}} + \frac{m_3 m_4}{s^3_{34}} + (\lambda-1)\frac{m_3 m_2}{s^3_{23}}\right)\vec{s}_{12} - \\
&\quad -\left(\frac{m_3 m_1}{s^3_{13}} + \frac{m_3 m_2}{s^3_{23}} + (\mu-1)\frac{m_3 m_4}{s^3_{34}}\right)\vec{s}_{14}\\
\vec{P}_4 &= \left(\frac{m_4 m_2}{s^3_{24}} + \lambda\frac{m_4 m_3}{s^3_{34}}\right)\vec{s}_{12} - \left(\frac{m_4 m_1}{s^3_{14}} + \frac{m_4 m_2}{s^3_{24}} + (1-\mu)\frac{m_4 m_3}{s^3_{34}}\right)\vec{s}_{14}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Или за покусо $\vec{P}_1 = \alpha_1\vec{s}_{12} + \alpha_2\vec{s}_{14}$, $\vec{P}_2 = \beta_1\vec{s}_{12} + \beta_2\vec{s}_{14}$, $\vec{P}_3 = \gamma_1\vec{s}_{12} + \gamma_2\vec{s}_{14}$, $\vec{P}_4 = \sigma_1\vec{s}_{12} + \sigma_2\vec{s}_{14}$, каде што α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, σ_1, σ_2, ги имаат соодветно значењата од (2.1).

Во однос на споменатата координатна система, равенките на правците p_1, p_2, p_4 на силите $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_4$ ќе бидат:

$$\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 = 0,\quad \beta_2 x_1 - \beta_1 x_2 - \beta_2 = 0,\quad \sigma_2 x_1 - \sigma_1 x_2 + \sigma_1 = 0.$$

Потребен и доволен услов за тоа овие прави да минуваат низ една точка е да биде исполнето:

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \beta_2 & -\beta_1 & -\beta_2 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Или ако се земат соодветните изрази од (2.1) и се извршат нужните трансформации, доаѓаме до:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{m_4}{m_3}+\mu\left(\frac{s_{14}}{s_{13}}\right)^3\right]\cdot\left[\frac{m_2}{m_3}+\lambda\left(\frac{s_{24}}{s_{34}}\right)^3\right]\cdot\left[\frac{m_1}{m_3}-(\lambda+\mu-1)\left(\frac{s_{12}}{s_{23}}\right)^3\right]-\\&-\left[\frac{m_4}{m_3}+\mu\left(\frac{s_{24}}{s_{23}}\right)^3\right]\cdot\left[\frac{m_2}{m_3}+\lambda\left(\frac{s_{12}}{s_{13}}\right)^3\right]\cdot\left[\frac{m_1}{m_3}-(\lambda+\mu-1)\left(\frac{s_{14}}{s_{34}}\right)^3\right]=0,\end{aligned} \tag{2.2}$$

што претставува потребен и доволен услов за постоењето на центар на атракцијата во овој случај.

Горната релација е задоволена кога

$$\frac{s_{14}}{s_{13}}=\frac{s_{24}}{s_{23}},\quad \frac{s_{24}}{s_{34}}=\frac{s_{12}}{s_{13}},\quad \frac{s_{12}}{s_{23}}=\frac{s_{14}}{s_{34}},$$

што ни дозволува да напишеме:

$$s_{12}\,s_{34}=s_{13}\,s_{24}=s_{14}\,s_{23}. \tag{2.3}$$

Земајќи го во обзир ставот 1. можеме да кажеме: *За да се сечат во една точка правците на силите $\vec{P}_i$, во рамнински случај на проблемот на 4 тела, доволно е да биде задоволена релацијата (2.3).*

На пример: за $\lambda+\mu-1<0$ таква е конфигурацијата кога произволно големи m_1, m_2, m_4 се наоѓаат во темињата на еден рамностран триаголник а m_3 во неговиот центар; исто така за $\lambda+\mu-1>0$ некои делтоиди ја задоволуваат (2.3).

Релацијата (2.3) претставува едно партикуларно решение на равенката (2.2); не постои ниедно друго решение на таа равенка,кое не е еквивалентно на (2.3), а да не бара сосем определени односи меѓу големините на масите m_i. Така, на пример: ако конфигурацијата е било кој делтоид со $s_{12}=s_{14}$ и $s_{13}=s_{43}$, што повлекува $\lambda=\mu$, условот (2.2) ќе биде задоволен ако $m_2=m_4$; ако $s_{12}=s_{14}$ и $\lambda=\mu={}^1/_2$, се добива рамнокрак триаголник со еднакви маси ($m_2=m_4$) на краиштата на основата и m_3 во нејзината средина, или за $\lambda=\mu=1$ — ромб (квадрат), на чии две спротивни темиња се еднакви маси; итн.

III. Положба на центарот на атракцијата

Во претходните два дела видовме дека правците на силите $\vec{P}_i$ во проблемот на 4 тела не минуваат секогаш низ една точка и дека таква точка постои кога моментната конфигурација на телата задоволува извесни услови.

Бидејќи условот (1.5), односно (2.3), се јавува заеднички за просторниот и рамнинскиот случај на проблемот и бидејќи не бара посебни ограничувања на големините на масите m_i, ќе се обидеме да ја определиме во тој случај положбата на центарот на атракцијата.

1. Аналитичните изрази на силите $\vec{P}_i$ ќе ги трансформираме на следниов начин:

$$\vec{P}_1 = \frac{m_1}{s^3_{12}\, s^3_{13}\, s^3_{14}} \left(m_2\, s^3_{13}\, s^3_{14}\, s_{12} + m_3\, s^3_{12}\, s^3_{14}\, \vec{s}_{13} + m_4\, s^3_{12}\, s^3_{13}\, \vec{s}_{14}\right),$$

$$\vec{P}_2 = \frac{m_2}{s^3_{12}} \left(m_1\, \vec{s}_{21} + m_3 \frac{s^3_{12}}{s^3_{23}}\, \vec{s}_{23} + m_4 \frac{s^3_{12}}{s^3_{24}}\, \vec{s}_{24}\right),$$

$$\vec{P}_2 = \frac{m_3}{s^3_{13}} \left(m_1\, \vec{s}_{31} + m_2 \frac{s^3_{13}}{s^3_{23}}\, \vec{s}_{32} + m_4 \frac{s^3_{13}}{s^3_{34}}\, \vec{s}_{34}\right),$$

$$\vec{P}_4 = \frac{m_4}{s^3_{14}} \left(m_1\, \vec{s}_{41} + m_2 \frac{s^3_{14}}{s^3_{24}}\, \vec{s}_{42} + m_3 \frac{s^3_{14}}{s^3_{34}}\, \vec{s}_{43}\right).$$

Заменувајќи ги вредностите за s_{12}, s_{13}, s_{14} пресметани од релацијата $s_{12}\, s_{34} = s_{13}\, s_{24} = s_{14}\, s_{23} = k$, т. е. $s_{12} = \dfrac{k}{s_{34}}$, $s_{13} = \dfrac{k}{s_{24}}$, $s_{14} = \dfrac{k}{s_{23}}$, доаѓаме до:

$$\vec{P}_1 = \rho\, m_1 \left(\frac{m_2\, k^3}{s^3_{24}\, s^3_{23}}\, \vec{s}_{12} + \frac{m_3\, k^3}{s^3_{34}\, s^3_{23}}\, \vec{s}_{13} + \frac{m_4\, k^3}{s^3_{34}\, s^3_{24}}\, \vec{s}_{14}\right),$$

$$\vec{P}_2 = \rho \frac{m_2\, k^3}{s^3_{24}\, s^3_{23}} \left(m_1\, \vec{s}_{21} + \frac{m_3\, k^3}{s^3_{34}\, s^3_{23}}\, \vec{s}_{23} + \frac{m_4\, k^3}{s^3_{34}\, s^3_{24}}\, \vec{s}_{24}\right),$$

$$\vec{P}_3 = \rho \frac{m_3\, k^3}{s^3_{34}\, s^3_{23}} \left(m_1\, \vec{s}_{31} + \frac{m_2\, k^3}{s^3_{24}\, s^3_{23}}\, \vec{s}_{32} + \frac{m_4\, k^3}{s^3_{34}\, s^3_{24}}\, \vec{s}_{34}\right),$$

$$\vec{P}_4 = \rho \frac{m_4\, k^3}{s^3_{34}\, s^3_{24}} \left(m_1\, \vec{s}_{41} + \frac{m_2\, k^3}{s^3_{24}\, s^3_{23}}\, \vec{s}_{42} + \frac{m_3\, k^3}{s^3_{34}\, s^3_{23}}\, \vec{s}_{43}\right),$$

каде што $\rho = k^3/(s_{12}\, s_{13}\, s_{14})^3$.

Нека ги воведеме следниве ознаки:

$$m^*_2 = m_2 \left(\frac{k}{s_{24} s_{23}}\right)^3, \quad m^*_3 = m_3 \left(\frac{k}{s_{34}\, s_{23}}\right)^3, \quad m^*_4 = m_4 \left(\frac{k}{s_{34}\, s_{24}}\right)^3 \tag{3.1}$$

и, заради целосност, $m^*_1 = m_1$, што ни дозволува да напишеме:

$$\begin{aligned}
\vec{P}_1 &= \rho\, m^*_1 (m^*_2\, \vec{s}_{12} + m^*_3\, \vec{s}_{13} + m^*_4\, \vec{s}_{14}),\\
\vec{P}_2 &= \rho\, m^*_2 (m^*_1\, \vec{s}_{21} + m^*_3\, \vec{s}_{23} + m^*_4\, \vec{s}_{24}),\\
\vec{P}_3 &= \rho\, m^*_3 (m^*_1\, \vec{s}_{31} + m^*_2\, \vec{s}_{32} + m^*_4\, \vec{s}_{34}),\\
\vec{P}_4 &= \rho\, m^*_4 (m^*_1\, \vec{s}_{41} + m^*_2\, \vec{s}_{42} + m^*_3\, \vec{s}_{43}).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ако големините m^*_1, m^*_2, m^*_3, m^*_4 ги сметаме како некои фиктивни маси што се наоѓаат во темињата на четириаголникот на положбата, т. е. на местата на m_1, m_2, m_3, m_4, тогаш од (3.2) се гледа дека: правецот на силата $\vec{P}_1$ минува низ тежиштето на масите m^*_2, m^*_3, m^*_4, правецот на $\vec{P}_2$ — низ тежиштето на m^*_1, m^*_3, m^*_4, правецот на $\vec{P}_3$ — низ тежиштето на m^*_1, m^*_2, m^*_4 и правецот на $\vec{P}_4$ низ тежиштето на m^*_1, m^*_2, m^*_3.

Бидејќи правецот што ја сврзува една маса со тежиштето на другите три минува низ заедничкото тежиште на четирите маси, следува дека пресечната точка на правците на силите $\vec{P}_i$, центарот на атракцијата, се наоѓа во тежиштето на фиктивните маси m^*_i, ако сметаме дека тие ги заземаат моментните положби на m_i.

Со оглед на реченото можеме да ја напишеме следната релација:

$$M^* \vec{S\Gamma} = m^*_1 \vec{r}_1 + m^*_2 \vec{r}_2 + m^*_3 \vec{r}_3 + m^*_4 \vec{r}_4 , \tag{3.3}$$

каде што се: S — тежиштето на масите m_1, m_2, m_3, m_4;

Γ — центарот на атракцијата;

$\vec{r}_i$ — векторот на положбата на m_i во однос на S;

$M^* = m^*_1 + m^*_2 + m^*_3 + m^*_4$.

Познавајќи ги положбите на телата во однос на нивното заедничко тежиште, како и нивните заемни растојанија, релацијата (3.3) ни овозможува определување на положбата на центарот на атракцијата, во овој случај на проблемот на 4 тела.

2. Ќе покажеме уште една релација што ја определува положбата на центарот на атракцијата со помош на векторите $\vec{s}_{ik}$.

Ако се земе во обзир дека точката Γ е во тежиштето на фиктивните маси m^*_i и ако се искористат познатите односи од теоријата за тежиштето на една материјална система, можат да се напишат следниве равенства:

$$- M^* \vec{g}_1 = m^*_2 \vec{s}_{12} + m^*_3 \vec{s}_{13} + m^*_4 \vec{s}_{14} ,$$

$$- M^* \vec{g}_2 = m^*_1 \vec{s}_{21} + m^*_3 \vec{s}_{23} + m^*_4 \vec{s}_{24} ,$$

$$- M^* \vec{g}_3 = m^*_1 \vec{s}_{31} + m^*_2 \vec{s}_{32} + m^*_4 \vec{s}_{34} ,$$

$$- M^* \vec{g}_4 = m^*_1 \vec{s}_{41} + m^*_2 \vec{s}_{42} + m^*_3 \vec{s}_{43} ,$$

каде што $\vec{g}_i$ е векторот на положбата на m_i во однос на Γ. Помножувајќи ги горните равенства, респективно, со m_1, m_2, m_3 и m_4, по нивното собирање се добива:

$$MM^*\vec{S\Gamma} = (m_1 m^*_2 - m_2 m^*_1)\vec{s}_{12} + (m_1 m^*_3 - m_3 m^*_1)\vec{s}_{13} + (m_1 m^*_4 - m_4 m^*_1)\vec{s}_{14} + (m_2 m^*_3 - m_3 m^*_2)\vec{s}_{23} + (m_2 m^*_4 - m_4 m^*_2)\vec{s}_{24} + (m_3 m^*_4 - m_4 m^*_3)\vec{s}_{34}$$

или, што е исто:

$$MM^*\vec{S\Gamma} = \alpha\vec{s}_{12} + \beta\vec{s}_{13} + \gamma\vec{s}_{14}, \tag{3.4}$$

каде што зедовме во обзир дека $m_1\vec{g}_1 + m_2\vec{g}_2 + m_3\vec{g}_3 + m_4\vec{g}_4 = -M\vec{S\Gamma}$ и ги воведовме следниве ознаки: $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ и

$$\alpha = m^*_2 M - m_2 M^*,\ \beta = m^*_3 M - m_3 M^*,\ \gamma = m^*_4 M - m_4 M^*.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Миланковић, М.: О општим интегралима проблема n тела, ГЛАС САН, 83, 1911 год

[2]. Брумберг, В. А.; Постояные конфигурации в проблеме четирех тел и их устојчивост. Астр. журнал, Т 34, № 1, 1957 год.

[3]. Vernić, R.: Kritična razmatranja o sudarima u problemu više tela, RAD, Kn 314.

[4]. Михајловић, Д.: Прилог испитивању једног специјалног проблема n тела, Весник ДМФ НР Србије, III, № 1—2, 1951 год.

[5]. Мадевски, Ж.: За центарот на атракцијата во проблемот на три тела, Билтен на ДМФ НР Македонија, Кн XIII, 1962 год.

[6]. Мадевски, Ж.: Прилог кон проучувањето на некои специјални случаи на проблемот на четири тела, Билтен на ДМФ НР Македонија, Кн XIII, 1962 год.

Živko Madevski

SUR LE CENTRE D'ATTRACTION DANS LE PROBLEME DE 4 CORPS

Résumé

Dans le Problème de 3 corps on défini le centre d'attraction comme le point commun des directions des trois forces newtoniennes; son existence est bien évidente. En ce qui concerne le Problème de n $\geqslant$ 4 corps, un tel point n'existe que pour un sertain nombre des cas speciaux (les configurations équidistantes, etc.).

Pour le cas de n = 4, dans cette note on montre le résultat suivant:

Pour que les quatre directions des forces newtoniennes, dans le cas non coplanaire du Problème de 4 corps, soient concourantes, il faut et il suffit que les distances mutuelles des corps, s_{ik}, *admettent la relation* $s_{12}s_{34} = s_{13}s_{24} = s_{14}s_{23}$.

La dite relation n'est que suffisante pour une configuration plane des corps.

Dans ce cas, on peut déterminer la positon du centre d'attraction par les éléments de configuration des corps.