ЗА ЕДНА ТЕОРЕМА НА МИЛАНКОВИЌ

Живко Мадевски

Во својот труд [1], на стр. 185, Миланковиќ ја наведува следнава теорема:

Потребниот и доволен критериум за тоа Проблемот на три тела — коишто се привлекуваат пропорционално на произволна потенција на нивното растојание (тука е содржан случајот на Њутновата гравитација) — да може, според денешната состојба на науката, да се реши егзактно, е определен со условот, овие три тела секогаш да образуваат таква констелација, при која полот на гравитацијата да паѓа во тежиштето на системот.

Подоцна, самиот Миланковиќ го променил поимот пол на гравитацијата — точка во која се сечат правците на силите што дејствуваат во Проблемот на три тела и што се резултат на нивните заемни привлекувања — во центар на атракцијата.

Во овој труд ќе покажеме дека условот, наведен во теоремата – поклопувањето на центарот на атракцијата со тежиштето да доведува до таканаречените Лагранжеви егзактни решенија — е нужен и доволен кога констелацијата на трите тела е триаголник, но не е ни нужен ни доволен за праволиниската.

Понатаму во текстот ќе претпоставуваме дека телата се привлекуваат според законот на Њутн за општа гравитација.

1. Се знае дека во Проблемот на три тела се добиваат конечни (Лагранжевите егзактни) решенија тогаш, и само тогаш, кога

$$\vec{P}_i = -k\, m_i\, \vec{r}_i, \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

кадешто k е еден позитивен скалар, m_i масите на телата, $\vec{r}_i$ радиус-вектор на масата (телото) m_i спрема тежиштето S, $\vec{P}_i$ силата резултанта од привлекувањето на m_i од другите две маси.

Од наведениот услов следува дека единствените конечни решенија се добиваат кога, во секој момент од интервалот во кој се изучува движењето на трите тела, а) неправолиниската конфигурација на телата е рамностран триаголник;

б) при праволиниската конфигурација, меѓусебните растојанија на телата $s_{12} = 1$, $s_{23} = z$, $s_{31} = 1 + z$ го исполнуваат условот

(2) $$m_1 z^2 [1-(1+z)^3] + m_2 (1+z)^2 (1-z^3) + m_3 [(1+z)^3 - z^3] = 0.$$

Да споменеме дека е доволно силите $\vec{P}_i$ да се колинеарни со $\vec{r}_i$ – па правците на овие сили да се сечат во тежиштето, при што условите (1) не мора да бидат исполнети.

2. Во трудовите [2] и [3] е покажано како може да се определи положбата на центарот на атракцијата Γ со помош на елементите од триаголникот на конфигурацијата на масите m_1, m_2, m_3. Имено, ако $\vec{R}$ е векторот на положбата на Γ спрема тежиштето S, тогаш е

(3) $$M(m_1 s_{23}^3 + m_2 s_{13}^3 + m_3 s_{12}^3)\vec{R} = m_1 m_2 (s_{31}^3 - s_{23}^3)\vec{s}_{12} + \\ + m_2 m_3 (s_{12}^3 - s_{31}^3)\vec{s}_{23} + m_3 m_1 (s_{23}^3 - s_{12}^3)\vec{s}_{31},$$

кадешто $M = m_1 + m_2 + m_3$, $\vec{s}_{ik}$ векторот на положбата на m_k во однос на m_i, $s_{ik} = |\vec{s}_{ik}|$.

2.1. Веднаш се гледа дека во случај кога $\vec{s}_{12}$, $\vec{s}_{23}$, $\vec{s}_{13}$ не се колинеарни, од условот $S \equiv \Gamma$ т.е. $\vec{R} = 0$ следува $s_{12} = s_{13} = s_{23}$, како и обратното, од $s_{12} = s_{13} = s_{23}$ добиваме дека $\vec{R} = 0$, односно $S \equiv \Gamma$. Потоа лесно се покажува дека тогаш силите $\vec{P}_i$ го исполнуваат условот (1).

Со тоа покажавме дека во случај на неколинеарна распоредба на масите m_1, m_2 и m_3, егзактното решение на Лагранж се добива кога центарот на атракцијата се поклопува со тежиштето на масите, и само тогаш.

2.2. Ако пак $\vec{s}_{12}$, $\vec{s}_{23}$, $\vec{s}_{13}$ се колинеарни и ако ставиме $s_{12} = 1$, $s_{23} = z$, $s_{13} = 1 + z$, од (3) се добива дека $\Gamma \equiv S$, т.е. $\vec{R} = 0$ кога

(4) $$m_1 m_2 [(1+z)^3 - z^3] + m_2 m_3 [1-(1+z)^3] z + \\ + m_3 m_1 (1+z)(1-z^3) = 0.$$

Значи, секогаш кога масите m_1, m_2, m_3 се разместени, по овој ред, на една права, така што нивните растојанија да го исполнуваат условот (4), центарот на атракцијата Γ ќе се поклопува со тежиштето на масите. Се гледа дека (4) не е ист со условот (2), т.е. во овој случај, со исполнувањето на условот $\Gamma \equiv S$, не ги добиваме егзактните решенија на Лагранж.

3. Да ја побараме положбата на центарот на атракцијата во случај на егзактните решенија на Проблемот при праволиниската конфигурација на масите (телата) m_1, m_2, m_3.

Ако земеме од (1) $m_i \vec{r}_i = -\vec{P}_i / k$ и ги замениме во — [2] стр. 26 —

$$(m_1 s_{23}^3 + m_2 s_{13}^3 + m_3 s_{12}^3) \vec{R} = m_1 s_{23}^3 \vec{r}_1 + m_2 s_{13}^3 \vec{r}_2 + m_3 s_{12}^3 \vec{r}_3,$$

се добива

$$(m_1 s_{23}^3 + m_2 s_{13}^3 + m_3 s_{12}^3) \vec{R} = -k^{-1} (s_{23}^3 \vec{P}_1 + s_{13}^3 \vec{P}_2 + s_{12}^3 \vec{P}_3).$$

Силата $\vec{P}_1$ може да се напише $\vec{P}_1 = \frac{m_1 m_2}{s_{12}^3} \vec{s}_{12} + \frac{m_1 m_3}{s_{13}^3} \vec{s}_{13}$, при што зедовме гравитационната константа да е $f = 1$; слични изрази се добиваат и за $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$.

Ако се заменат силите $\vec{P}_i$ со своите изрази, како и ако се земе $s_{12} = 1$, $s_{23} = z$, $s_{13} = 1 + z$, односно $\vec{s}_{23} = z\,\vec{s}_{12}$, $\vec{s}_{13} = (1+z)\,\vec{s}_{12}$, добиваме

$$(m_1 + m_2 z^3 + m_3 (1+z)^3) \vec{R} = k^{-1} \left\{ m_1 m_2 [z^3 - (1+z)^3] + \frac{m_2 m_3}{z^2} [(1+z)^3 - 1] + \frac{m_3 m_1}{(1+z)^2} (z^3 - 1) \right\} \vec{s}_{12}. \tag{5}$$

Се гледа дека во случај на егзактните решенија, центарот на атракцијата Γ не би се поклопил со тежиштето S, бидејќи, ако се направи срамнување со (2), изразот во големите загради не ќе биде нула.

4. Може да се покаже дека равенките (2) и (4) имаат само по еден реален позитивен корен, за произволни вредности на параметрите m_1, m_2, m_3. Може да се постави прашањето дали овие позитивни корени не се еднакви? Следниот пример дава негативен одговор.

За $m_1 = m_2 = 1$ и $m_3 = 19/73$, равенката (4) има позитивно решение $z = 2$; за истите вредности на m_1, m_2, m_3 равенката (2) има решение $z \neq 2$, бидејќи нејзиното позитивно решение $z = 2$ се добива за $m_1 = m_2 = 1$ и $m_3 = 167/19$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Миланковић, М.: О општим интегралима проблема *n* тела, Глас САН, LXXXIII, 1911 год.

[2] Поповић Бож.: Vektoraj elementoj de elipsa movigo de dukorpa masocentro cirkau tria korpo, Билтен на Друшт. на физ. и мат. на НРМ, кн. VII. 1956 год.

[3] Мадевски Живко; За центарот на атракцијата во Проблемот на три тела, Билтен на Друшт. на матем. и физ. на НРМ, кн. XIII, 1962.

SUR UN THEOREME DE MILANKOVIĆ

Živko Madevski

Résumé

L'année 1911, Milanković a énoncé le théorème: pour que le Problème de trois corps admet les solutions exacts (de Lagrange), il faut et il suffit que le centre d'atraction (le point d'intersection des directions des forces newtoniennes) se joint à le centre de gravité des trois corps.

Dans cette note on montre que la dite condition est nécessaire et suffisante quand la configuration des corps est un triangle, mais qu'elle n'est ni nécessaire ni suffisante dans le cas d'une configuration rectiligne; de même on donne l'équation (5) qui détermine la position de centre d'atraction dans ce cas-ci.