НЕКОИ МЕТОДИ ЗА РЕШАВАЊЕ ЗАДАЧИ СО ГЕОМЕТРИСКИ МЕСТА

СТЈЕПАН ЛУКИЌ

Решавањето задачи со геометриски места им задава на учениците доста тешкотии. Една од причините за тие тешкотии секако е недоволното познавање на методите за решавање задачи од овој вид. Затоа ќе изложиме некои методи за решавање задачи со геометриски места за да би ги учениците полесно решавале. Ќе се ограничиме само на некои геометриски места во рамнина. Бараното геометриско место во задачите, кои се решаваат во нашите средни школи, во главно се права или дел од права, конусен пресек или дел од конусниот пресек.

Како што знаеме геометриско место во рамнина е целокупноста на сите точки во рамнината кои исполнуваат еден даден услов односно кои имаат едно заедничко својство.

Пред да започнеме со строго математичко докажување каква фигура е бараното геометриско место, добро е да се направи следното. Од полза е да се назре каква фигура е бараното геометриско место. Тоа ќе постигнеме ако конструираме што поголем број на точки од бараното геометриско место и ги сврземе. Цртежот треба да биде поголем и да е работен со максимална точност. Неточно изработена слика може да не одведе на погрешен пат.

Да го појасниме ова на еден конкретен пример. — Треба да се најде геометриското место на средините од сите тетиви на кругот кои минуваат низ негова една внатрешна точка.

Ако нацртаме повеќе вакви тетиви и им ги сврземе средините доаѓаме со разгледување до претпоставката дека бараното геометриско место би можело да биде кружна линија чиј дијаметар е растојанието меѓу центарот на кругот и дадената точка. Кога го правиме цртежот потребно е секако да ги нацртаме и оние тетиви кои се маркантни. Тоа во нашиот случај се дијаметарот низ дадената точка како и тетивата нормална на овој дијаметар низ оваа точка. Кога еднаш веќе ја назревме каква фигура би можело да биде геометриското место, доказот дека нашето предвидување е точно, многу е олеснет.

Ако е тешко да се установи каква фигура е бараното геометриско место, треба да се испитуваат посебни случаи на фигурата која го произведува геометриското место.

Ќе го појасниме ова на еден полесен пример за да би се што подобро разбрала искажаната мисла. Да ја земеме оваа задача: Треба да се најде геометриското место на пресечните точки од дијагоналите на сите правоаголници впишани во дадениот триаголник така, што едната страна на правоаголникот да се поклопува со една страна на триаголникот. Во овој наш случај прво можеме да испитаме каква фигура е геометриското место за случај триаголникот да е рамнокрак. Со разгледување а врз основа на симетријата, заклучуваме дека бараното геометриско место е отсечка што ја сврзува средината на базата на триаголникот со средината на висината на триаголникот. Сега преминуваме на кој било триаголник.

Приложувајќи го овој втор начин треба да бидеме многу претпазливи. Многу пати геометриското место, што го произведува посебен случај на дадената фигура, е толку модифицирано да не ни помага да ја назреме фигурата на бараното геометриско место на дадената фигура.

Овие два спомнати начини се основаваат на интуиција и поради тоа немаат строго научен карактер. Но нивното приложување е од полза. Многу полесно е да се изврши докажувањето на фигурата на бараното геометриско место ако порано сме ја назрели формата на бараното геометриско место.

Утврдување фигурата на геометриско место со докажување

А) без примена на координатна система

Решавање задачи на геометриски места треба да има добро избран методски пат, кој му е најблизок на ученикот и му изгледа како најприроден. Овој пат често е долг но затоа пак за учениците може да биде поприфатлив. Во почетокот треба да се избегнуваат куси и можеби поелегантни решенија затоа што тие на еден осреден ученик му оставуваат впечаток како да се плод на некоја досетка или случајност, и предизвикуваат кај него чувство на немоќ и малодушност.

Треба плански да се оди од полесни до потешки задачи. При секое докажување дека фигурата која ја назревме со цртежот навистина представува бараното геометриско место, треба да си ја олесниме работата колку е можно. Сликата која ни служи за докажување треба да содржи само

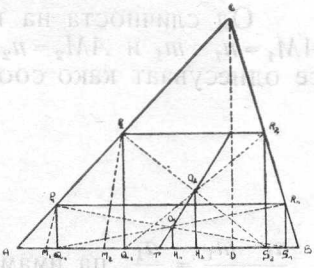
неопходно потребни линии и точки. Излишните линии и точки само го компликуваат докажувањето бидејќи потешко можеме да ја забележиме врската меѓу елементите на нашата слика. Покрај тоа можат да ни го одвлечат вниманието на сосем погрешен пат.

Ако сме успеале да ја назреме фигурата на бараното геометриско место тогаш имаме прецизни методи да докажеме дека токму таа е бараната фигура, во колку навистина е. При решавањето на секоја задача треба да се постапува вака. Подвижната (курентна) точка која го опишува геометриското место да се сврзе со некои маркантни точки од самото геометриско место или од фигурата која го произведува. Сега настојуваме да утврдиме некое својство на фигурата од бараното геометриско место. При тоа треба да ги ползуваме дадените податоци.

За да го разбереме ова подобро, ќе разгледаме некои посебни случаи.

Ако сме назреле на пр. дека нашето геометриско место е *права*, тогаш ќе постапуваме на следниот начин. Подвижната точка ќе ја сврземе со некоја неподвижна точка на фигурата, која го определува геометриското место или со некоја маркантна точка на самото геометриско место. Потоа настојуваме да утврдиме некој стален агол што го зафаќа правата што минува низ двете спомнати точки со некој стален смер на зададената фигура. Ако е навистина за секоја точка на нашето геометриско место овој агол еднаков, тогаш сигурно е дека бараното геометриско место е правата на која лежат фиксната и подвижната точка. За ова докажување ползуваме триаголници и четириаголници.

За да бидеме уште поконкретни ќе го разјасниме тоа на оној пример со правоаголниците впишани во триаголникот. Порано рековме дека можеме да назреме во таа задача дека геометриското место на пресечните точки на дијагоналите е една отсечка. Докажување изгледа вака. Како неподвижна точка ќе ја земеме точката T, средината на AB. Таа точка сигурно му припаѓа на нашето геометриско место (страната AB можеме да ја замислиме како правоаголник со висина нула). Земаме два положаја од нашата подвижна точка. Нека се тие положаи O_1 и O_2. Ќе ги сврземе точките O_1 и O_2 со точката T. Треба да се докаже дека точките O_1, O_2 и T лежат на нашата права. Со други зборови треба да се докаже дека е



Сл. 1

$$\sphericalangle O_1TH_1 = \sphericalangle O_2TH_2$$

За да ја докажеме еднаквоста на овие агли ќе докажеме дека триаголници O_1TH_1 и O_2TH_2 се слични. Да ја олесниме работата ќе ги уведеме овие ознаки

$$P_1Q_1 = a_1 \quad P_2Q_2 = a_2 \quad S_1B = m_1 \quad S_2B = m_2$$

$$Q_1S_1 = b_1 \quad Q_2S_2 = b_2 \quad AQ_1 = n_1 \quad AQ_2 = n_2$$

Да претпоставиме дека е $AC > BC$

Доказ. — Спрема дадените услови на нашата слика треба да биде

$$\frac{O_1H_1}{O_2H_2} = \frac{\frac{a_1}{2}}{\frac{a_2}{2}} = \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{TH_1}{TH_2} = \frac{\frac{c}{2} - \left(\frac{b_1}{2} + m_1\right)}{\frac{c}{2} - \left(\frac{b_2}{2} + m_2\right)} \text{ или}$$

$$\frac{TH_1}{TH_2} = \frac{(c - b_1) - 2m_1}{(c - b_2) - 2m_2}.$$

Бидејќи е

$$c - b_1 = n_1 + m_1,$$

$$c - b_2 = n_2 + m_2,$$

тогаш е

$$\frac{TH_1}{TH_2} = \frac{n_1 - m_1}{n_2 - m_2}.$$

Од сличноста на триаголниците AM_1P_1 и AM_2P_2 каде $AM_1 = n_1 - m_1$ и $AM_2 = n_2 - m_2$ имаме хомологните страни да се однесуваат како соодветните висини

$$\frac{AM_1}{AM_2} = \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2},$$

$$\frac{n_1 - m_1}{n_2 - m_2} = \frac{a_1}{a_2}, \text{ па имаме } \frac{TH_1}{TH_2} = \frac{a_1}{a_2} \text{ односно } \frac{O_1H_1}{O_2H_2} = \frac{TH_1}{TH_2}.$$

Со тоа докажавме дека правоаголни триаголниците O_1TH_1 и O_2TH_2 се слични. Имено точките T, O_1, O_2 да лежат на иста права. Со тоа докажавме дека геометриското место е отсечка со почетна точка T. Крајната точка на оваа отсечка е средината на висината CD. (како впишан правоаголник со основа нула а висина CD).

Да земеме сега друг конкретен случај. Ако со претходна конструкција на повеќе точки сме назреле дека тоа место е *кружна линија*, тогаш при докажувањето ќе постапуваме вака. Ќе настојуваме да утврдиме некое заедничко својство на сите точки, кое е карактеристично за кружна линија. Да наведеме само неколку својства. Сите периферискиагли над ист кружен лак се еднакви меѓу себе, симетралата на која било тетива минува низ една постојана точка (центар), две кои било точки на кружната линија образуваат секогаш со центарот равнокрак триаголник, и т. н.

Да кажеме поконкретно. Подвижната точка M од нашето геометриско место ќе ја сврземе со две маркантни точки од кружната линија. За секој положај од M на кружната линија аголот AMB мора да биде стален, односно за кој било положај од M симетралата на MA мора да минува секогаш низ постојаната точка на симетралата од AB. Ако ни е познат центарот O и една стална точка A на кружната линија, тогаш триаголникот AOM, каде M е подвижна точка, мора да биде рамнокрак, и т. н.

Да го илустрираме ова на една полесна задача. — Дадена е кружната линија K и на неа неподвижната точка A. Низ A ги повлекуваме сите пресечки (секанти). На секоја пресечка од нејзината друга пресечна точка C со кружната линија нанесуваме во продолжение преку C отсечка еднаква со тетивата AC и ја добиваме точката M. Да се најде геометриското место на овие точки M.

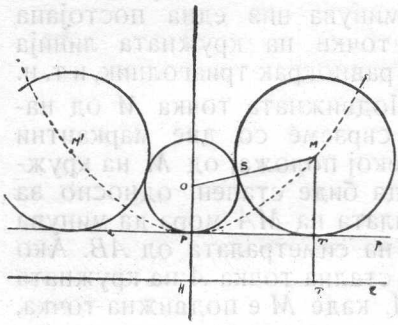
Спрема дадените услови на сликата мора да е:

$AC = CM$. Неподвижните точки A, B кои се краеви на еден дијаметар ќе ги сврземе со M. Триаголникот AMB е рамнокрак бидејќи $BC \perp AM$ и $AC = CM$. Спрема тоа $\triangle ACB \cong \triangle MCB$ односно $AB = MB$. Гледаме дека отсечката MB = конст. = AB. Точката M опишува, значи, една кружна линија со центар во точката B и радиус BA.

За решавање задачи од геометриските места треба да ја ползуваме и симетријата, ако тоа е можно. Пред самото докажување прво ќе утврдиме дали дадената фигура, што го определува геометриското место има центар на симетријата или оски на симетријата (една или повеќе). Тогаш тој центар односно оските на симетријата се едновремено центар односно оски на симетријата или и едното и другото и за фигурата на бараното геометриско место. Тоа ни помага полесно да ја назреме фигурата на геометриското место а потоа и самото докажување е олеснето.

Да ја земеме оваа задача. Дадена е една кружна линија k со своја допирка p. Да се најде геометриско место на центрите на кружни линии што ја допираат дадената кружна линија и нејзината дадена допирка.

Решение. — Веднаш можеме да констатираме дека правата повлечена низ точките P и O е оска на симетријата на дадената фигура. Таа права ќе биде оска на симетријата на бараното геометриско место. Прва фигура што го задоволува дадениов услов е правата што минува низ O, P. Навистина секоја кружна линија која минува низ точката P а чии центарот лежи на правата низ OP го задоволува бараниот услов. Но имаме уште едно решение, што го задоволува бараниот услов. За да ја најдеме таа фигура ќе го сврземе центарот M на кружната линија, што го задоволува бараниот услов, со центарот O. Мора да биде $MS = MT$. Ако со дадената допирка на растојание PH $(= PO)$ повлечеме права паралелна со p ќе видиме дека секогаш е $MO = MT_1$. За секоја кружна линија од едната страна на оската на симетријата ќе имаме соответна симетрична кружна линија на другата страна на оската. Бидејќи центарот на секоја кружна линија што го задоволува дадениот услов е еднакво одалечен од постојаната точка O и правата q тоа нашето геометриско место е парабола, чиј фокус е во точката O а правата q и е директриса.



Сл. 2

Докажување на геометриското место со примена на Декартова координатна система

Со примена на координатна система докажувањето на фигурата на бараното геометриско место често пати многу се олеснува. Прво да напоменеме дека е важно како да се обележуваат координатите на точките. Така на пр. координатите на курентната точка ќе ги означуваме со x, y, и т. н. а координатите на постојани точки со исти точки и индекси, на пр. x_0, y_0, x_1, y_1, и т. н. Да се докаже која фигура е бараното геометриско место треба да се пронајде нејзината равенка. Поради тоа е многу важно учениците од порано да се навикнат на тоа, секој геометриски услов да знаат да го изразат со равенка.

Да земеме една поедноставна задача. — Зададена е отсечката $AB = 20$. Точката A да се движи постојано по X-оската, а точката B по Y-оската. Да се најде геометриското место на точката P која ја дели отсечката AB во однос

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}.$$

Од нашиот зададен услов а врз основа на сличноста имаме:

$$OP_1 : OA = 3 : 5, \quad x : OA = 3 : 5$$

$$PP_1 : OB = 2 : 5, \quad y : OB = 2 : 5$$

каде OP_1 е апсциса а PP_1 ордината на точката P

$$OA = \frac{5x}{3}, \; OB = \frac{5y}{2}$$

Ако на правоаголниот триаголник OAB ја примениме Питагоровата теорема, ќе добиеме

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2$$

$$\left(\frac{5x}{3}\right)^2 + \left(\frac{5y}{2}\right)^2 = 400 \quad \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

Бараното геометриско место, е значи, елипса со полуоски $a = 12$, $b = 8$.

Многу важен е и изборот на координатна система. Ако избереме згодна координатна система, тоташ и аналитичките изрази ќе бидат знатно скратени а работата олеснета. Каква координатна система ќе примениме тоа зависи од самата задача. Едно треба да имаме постојано предвид а тоа е, дека изразите кои зависат од аглите полесно се решаваат во правоаголната координатна система отколку во косоаголната. Но во многу други случаи примената на косоаголната система дава поедноставни и поолегантни решенија. Да го видиме ова на една задача.

Зададени се две прави кои се сечат под агол ω. Да се најде геометриското место на такви точки P паралелограмот кој го сочинуваат зададените прави и паралелите и низ P со зададените прави, да има стална површина a^2.

Зададените прави ќе ги избереме за координатни оски а нивниот пресек за коодинатен почеток. Точката P нека ги има координатите x, y.

Површнината на паралегограмот кој го исполнува бараниот услов е

$$S = xy \sin \omega = a^2 \quad xy = \frac{a^2}{\sin \omega}$$

а тоа е равенката на хиперболата изразена во координатна система чии оски се асимптоми.

Понекогаш не сме во состојба направо да го изразиме дадениот услов со равенка меѓу координатите на курентната точка. Но ние на тоа нема да се задржуваме.

Да би можеле учениците во горните класови со успех да ги решаваат задачите со геометриски места, треба уште во долните класови да се навикнат на тој поим. Така кога обработуваме симетрала на отсечка, симетрала на агол, кружна линија и др. ние треба да нагласуваме дека овие фигури во исто време се и геометриски места, зашто секоја точка на овие фигури го задоволува еден ист услов. Така на пр. за симетралата на аголот прво ќе речеме дека тоа е полуправа која го аголот дели на два еднакви дела. (експериментални доказ). Потоа кога ќе го сфатат тој поим, ќе покажеме дека секоја точка на оваа симетрала еднакво е оддалечена од неговите краци. Поради тоа што секоја точка на оваа симетрала исполнува еден ист услов за оваа полуправа викаме дека уште е едно геометриско место. Така постапуваме и во други случаи. По овој начин учениците постепено се навикнуваат на поимот на геометриското место, се подобро и подобро го сфаќаат.

Исто така е важно учениците да се оспособат секој геометриски услов во аналитичката геометрија, да знаат, да го изразат со равенка. При излагањето треба да се подвлече, дека секоја равенка во вид $\Phi(x, y) = 0$ $y = \varphi(x)$ или $x = \varphi(X), y = \psi(X)$ во сушност претставува едно геометриско место на точки чии координати се x, y.

Покрај изложеното од првостепена важност е и тоа, учениците добро да го усвојат градивото по геометрија, кое се обработува спрема пропишаната програма. Посебно да се поподробно запознаат со оние делови на програмата кои имаат голема примена при решавањето на задачи со геометриски места (на пр. перифериски агли, тетивен четириаголник, симетрија и др.).

ЛИТЕРАТУРА

J. Hadamard: Leçons de géométrie élementaire, Paris 1917.

Salmon—Fiedler: Analytische Geometrie der Kegelschnitte Leipzig —Berlin 1922.

Louis Long: Méthodes de résolution de problèmes de lieux, d'enveloppes et de constructions géométriques et applications, Paris 1934.