Математички Билтен
Книга 9-10 (XXXV-XXXVI)
1985-1986 (11-17)
Скопје, Југославија

# ЗА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ

Д.Л. Карчицка

За класата системи линеарни равенки со матрица еднаква на разликата меѓу дијагоналната матрица со дијагонала $a^j$, $j=0,1,\ldots,n-1$ и $n\times n$-матрицата со елементи сите еднакви на 1 се изведуваат заклучоци во врска со решенијата преку водечко пивотирање со блок-матрица. Во случајот на противречен систем се наоѓа чебишевското растојание и чебишевска точка користејќи ја придружната ЛП-задача.

За произволно дадени реален број $a$ и природен број $n \geq 2$, со $D(a,n)$ се означува разликата меѓу дијагоналната матрица од $n$-ти ред со дијагонала $a^j$, $j=0,1,\ldots,n-1$, и $n\times n$-матрицата $E$ со елементи сите еднакви на 1, т.е.

$$D(a,n) = \operatorname{diag}(a^0,a^1,\ldots,a^{n-1})-E. \qquad (1)$$

Три наједноставни матрици од типот $D(a,n)$ определени со (1), земајќи $0^0=0$ и означувајќи ја со $I$ единичната матрица од $n$-ти ред, се следниве:

$$D(0,n) = -E,$$

$$D(-1,n) = \operatorname{diag}(1,-1,\ldots,(-1)^{n-1}) - E,$$

$$D(1,n) = I - E. \ ([2])$$

Во случајот кога $a\neq 0, -1$ матрицата $D(a,n)$ е несингуларна за секој $n$, а во случајот кога $a=-1$ тоа е точно за $n=2m$ и притоа инверзната матрица може да се запише на следниов начин:

$$D^{-1}(a,n) = \frac{1}{s}\left[d_{ij}\right],\ s = \sum_{j=0}^{n-2} a^j,\ d_{ij} = \begin{cases} (s-a^{n-i})/a^{i-1}, & i=j \\ -a^{n-i-j+1}, & i\neq j. \end{cases}$$

Посебно,

$$D^{-1}(1,n) = I - \frac{1}{n-1} E,$$

а за $D(-1,2m)$, користејќи ја, на пример, поделбата на блокови соодветна на множествата индекси

$$J_1 = \{2j-1,\ j=1,\ldots,m\},\quad J_2 = \{2j,\ j=1,\ldots,m\}\ (m\geq 1). \qquad (2)$$

т.е.

$$D(-1,2m) = \begin{bmatrix} (I-E)_{J_1J_1} & -E_{J_1J_2} \\ -E_{J_2J_1} & -(I+E)_{J_2J_2} \end{bmatrix}$$

се добива инверзната матрица

$$D^{-1}(-1,2m) = \begin{bmatrix} (I+E)_{J_1J_1} & -E_{J_1J_2} \\ -E_{J_2J_1} & (E-I)_{J_2J_2} \end{bmatrix}$$

која одговара на изборот $s=1$ и на

$$d_{ij} = \begin{cases} 2, & i=j=2\ell-1, \\ 0, & i=j=2\ell, \\ -1, & i\neq j,\ i+j=2\ell-1, \\ 1, & i\neq j,\ i+j=2\ell, \end{cases} \quad \ell=1,\dots,m$$

во општата формула за $D^{-1}(a,n)$.

За матрицата $D(-1,2m+1)$, користејќи на пример водечка трансформација со блокот $D(-1,2m)$ ([4], [5], [6]), се утврдува дека е сингуларна со ранг $n-1=2m$ и дека нејзиното јадро може да се запише во вид

$$U = \{u = \lambda \sum_{j=1}^{2m+1} (-1)^{j-1} e_j,\ \lambda \in R\} \tag{3}$$

каде што со $e_j$, $j=1,\dots,2m+1$ се означени единичните $2m+1$-вектори, а со $R$ полето од реалните броеви.

Погорните согледувања овозможуваат да се изведат одредени заклучоци во врска со системот линеарни равенки

$$D(a,n)x = d \tag{4}$$

а посебно со

$$D(-1,2m+1)x = d \tag{5}$$

за произволно даден $n$-вектор $d=[d_i]$ $(n=2m+1)$.

<u>Заклучок 1</u>. Векторот $x^*=d-e^Tde/(n-1)$, каде што $e$ го означува векторот со компоненти сите еднакви на 1, а $T$ означува транспозиција, претставува решение на системот (4) за $a=1$.

<u>Заклучок 2</u>. Блок-векторот

$$\begin{bmatrix} x^*_{J_1} \\ x^*_{J_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{J_1} + (e^T_{J_1} d_{J_1} - e^T_{J_2} d_{J_2}) e_{J_1} \\ -d_{J_2} + (e^T_{J_2} d_{J_2} - e^T_{J_1} d_{J_1}) e_{J_2} \end{bmatrix}$$

соодветен на изборот на $J_1$ и $J_2$ зададени со (2), го претставува решението на системот (4) за случајот a=-1, n=2m.

Од непозитивноста на D(1,n) и D(-1,2m) следува дека за ненегативност на погорните решенија, мора да биде

$$d \le o$$

и

$$\min_{1\le i\le n} \{d_i\} \ge e^T d/(n-1) \text{ за } D(1,n),$$

односно

$$\max_{1\le i\le n} \{d_{2i}\} \le s_2 - s_1 \le \min_{1\le i\le m} \{d_{2i-1}\} \quad \text{за } D(-1,2m)$$

каде што

$$s_1 = e_{J_1}^T d_{J_1}, \quad s_2 = e_{J_2}^T d_{J_2}.$$

Секако позанимлива е дискусијата во врска со системот (5), на кој му одговара блок-формата на запис, соодветна на $J_1$ и $J_2$ зададени со (2),

$$\begin{bmatrix} (I-E)_{J_1J_1} & -E_{J_1J_2} & -e_{J_1} \\ -E_{J_2J_1} & -(I+E)_{J_2J_2} & -e_{J_2} \\ -e_{J_1} & -e_{J_2}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{J_1} \\ x_{J_2} \\ x_{2m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{J_1} \\ d_{J_2} \\ d_{2m+1} \end{bmatrix}$$

Непосредно, на пример со водечко пивотирање со блокот

$$D(-1,2m) = \begin{bmatrix} (I-E)_{J_1J_1} & -E_{J_1J_2} \\ -E_{J_2J_1} & -(I+E)_{J_2J_2} \end{bmatrix}$$

се добива еквивалентниот систем

$$\begin{aligned} x_{J_1} - x_{2m+1} e_{J_1} &= d_{J_1} + (s_1 - s_2) e_{J_1} \\ x_{J_2} + x_{2m+1} e_{J_2} &= -d_{J_2} + (s_2 - s_1) e_{J_2} \\ 0 &= s_1 - s_2 + d_{2m+1} \end{aligned}$$

од кој непосредно следува:

<u>Заклучок 3</u>. Системот (5) е решлив само во случајот кога

$$s_1 + d_{2m+1} - s_2 = 0$$

и притоа правата

$$L = \{ \begin{bmatrix} x_{J_1} \\ x_{J_2} \\ x_{2m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{J_1} - d_{2m+1} e_{J_1} \\ -d_{J_2} + d_{2m+1} e_{J_2} \\ 0 \end{bmatrix} + x_{2m+1} \begin{bmatrix} e_{J_1} \\ -e_{J_2} \\ 1 \end{bmatrix}, \; x_{2m+1} \in R \}$$

го претставува множеството од решенија.

По воведувањето на ознаките

$$\alpha = s_1 + d_{2m+1} - s_2 \left(= \sum_{i=1}^{2m+1} (-1)^{i-1} d_i\right),$$

$$\lambda_1 = \max_{1 \le i \le n} \{0, d_{2m+1} - d_{2i-1}\}$$

$$\lambda_2 = \min_{1 \le n \le m} \{d_{2m+1} - d_{2i}\}$$

на едноставен начин може да се одговори и на прашањето во врска со постоењето на ненегативни решенија на (5):

<u>Заклучок 4</u>. Ако $\bar{d} \le 0$, $\alpha = 0$ и $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$, тогаш отсечката на правата L со крајни точки соодветни на $x_{2m+1} = \lambda_1$, $x_{2m+1} = \lambda_2$ го претставува множеството ненегативни решенија на системот (5).

За противречниот систем (5), кој одговара на случајот $\alpha \ne 0$, се поставува задачата за наоѓање на чебишевското растојание $z^*$ и чебишевска точка $x^*$ ([1]), дефинирани со условот:

$$z^* = \max_{1 \le i \le 2m+1} \{|-e^T x^* + (-1)^{i-1} x_i^* - d_i|\} = \inf_x \{\max_i \{|-e^T x + (-1)^{i-1} x_i - d_i|\}\}.$$

Решение може да се добие со помош на придружената ЛП-задача

$$\min\{z = x_{2m+2} \left| \begin{array}{l} y = -d + D(-1, 2m+1)x + x_{2m+2} e \\ \\ \hat{y} = d - D(-1, 2m+1)x + x_{2m+2} e \end{array} \right., x_{2m+1} \ge 0, y \ge o, \hat{y} \ge o\}$$

со извршување на само едно блочно пивотирање.

Поаѓајќи од блок-формата на запишување на системот битни ограничувања на ЛП-задачата, соодветна на множествата индекси $J_1$ и $J_2$ зададени со (2), во случајот $\alpha < 0$ пивотирајќи со блок-матрицата

$$B = \begin{bmatrix} -E_{J_2 J_1} & -(E+I)_{J_2 J_2} & e_{J_2} \\ (E-I)_{J_1 J_1} & E_{J_1 J_2} & e_{J_1} \\ e_{J_1}^T & e_{J_2}^T & 1 \end{bmatrix}$$

за која

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{J_2 J_1} & -I_{J_2 J_2} & e_{J_2} \\ (-I + \frac{2}{2m+1}E)_{J_1 J_1} & \frac{2}{2m+1}E_{J_1 J_2} & \frac{1-2m}{2m+1}e_{J_1} \\ \frac{1}{2m+1}e^T_{J_1} & \frac{1}{2m+1}e_{J_2} & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

се добива допустливото решение

$$\left.\begin{aligned} x^*_{J_1} &= d_{J_1} - d_{2m+1} e_{J_1} &, \quad y^*_{J_1} &= -\frac{2\alpha}{2m+1}e_{J_1}, \\ x^*_{J_2} &= -d_{J_2} + (d_{2m+1} - \frac{2\alpha}{2m+1}) e_{J_2} &, \quad y^*_{J_2} &= -\frac{2\alpha}{2m+1}e_{J_2}, \\ x^*_{2m+2} &= -\frac{\alpha}{2m+1} &, \quad \hat{y}^*_{2m+1} &= -\frac{2\alpha}{2m+1}, \\ x^*_{2m+1} &= 0, \quad y^*_{J_2} = o_{J_2}, & \hat{y}^*_{J_1} &= o_{J_1}, \quad \hat{y}_{2m+1} = 0 \end{aligned}\right. \qquad (6)$$

за кое функцијата на целта прима облик

$$x_{2m+2} = \frac{1}{2m+1}(-\alpha + e^T_{J_2} y_{J_2} + e^T_{J_1} \hat{y}_{J_1} + \hat{y}_{2m+1}).$$

Во случајот $\alpha > 0$, пак, пивотирањето со блок-матрицата

$$B = \begin{bmatrix} -(E-I)_{J_1 J_1} & -E_{J_1 J_2} & e_{J_1} \\ E_{J_2 J_1} & (E+I)_{J_2 J_2} & e_{J_2} \\ -e^T_{J_1} & -e^T_{J_2} & 1 \end{bmatrix}$$

за која

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} I_{J_1 J_1} & O_{J_1 J_2} & -e_{J_1} \\ -\frac{2}{2m+1}E_{J_2 J_1} & (I - \frac{2}{2m+1}E)_{J_2 J_2} & \frac{2m-1}{2m+1}e_{J_2} \\ e^T_{J_1} & e^T_{J_2} & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

го дава допустливото решение

$$\left.\begin{aligned} x^*_{J_1} &= d_{J_1} - d_{2m+1} e_{J_1} &, \quad y^*_{J_2} &= \frac{2\alpha}{2m+1}e_{J_2}, \\ x^*_{J_2} &= -d_{J_2} + (d_{2m+1} - \frac{2\alpha}{2m+1}) e_{J_2} &, \quad \hat{y}^*_{J_1} &= \frac{2\alpha}{2m+1}e_{J_1}, \\ x^*_{2m+2} &= \frac{\alpha}{2m+1} &, \quad \hat{y}^*_{2m+1} &= \frac{2\alpha}{2m+1}, \\ x^*_{2m+1} &= 0, \quad y^*_{J_1} = o_{J_1}, & y^*_{2m+1} &= 0, \quad \hat{y}^*_{J_2} = o_{J_2}, \end{aligned}\right. \qquad (7)$$

за кое функцијата на целта на ЛП-задачата прима вид

$$x_{2m+2} = \frac{1}{2m+1}(\alpha + e^T_{J_1} y_{J_1} + e^T_{J_2} \hat{y}_{J_2} + y_{2m+1}).$$

Од обликот на функцијата на целта во обата случаја следува:

Заклучок 5. Чебишевското растојание на противречниот систем (5) изнесува $z^* = |\alpha|/(2m+1)$; чебишевска точка

$$x^* = \begin{bmatrix} x^*_{J_1} \\ x^*_{J_2} \\ x^*_{2m+1} \end{bmatrix}$$

е зададена со формулата (6), односно (7).

Во случајот на противречен систем (5), како што е добро познато, решлив е системот

$$\begin{aligned} D(-1,2m+1)x &= o \\ d^T x &= \beta \end{aligned} \qquad (8)$$

за произволно даден ненулти број $\beta$. Познавањето на јадрото зададено со (3), на $D(-1,2m+1)$ за системот (8) повлекува

$$0 \neq \beta = d^T x = \lambda d^T \sum_{i=1}^{2m+1} (-1)^{i-1} e_i = \lambda\alpha$$

од каде што се добива

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$$

Оттука следува

Заклучок 6. Векторот $x = \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^{2m+1} (-1)^{i-1} e_i$ е единственото решение на системот (8).

Аналогно, за системот

$$\begin{aligned} D(-1,2m+1)x &\geq o \\ d^T x &< 0 \end{aligned}$$

лесно може да се укажат решенија во случајот на отсуство на ненегативни решенија на (5).

## Л И Т Е Р А Т У Р А


[1] Зуховицкий, С.И; Л.И. Авдеева: Линейное и выпуклое программирование, „Наука", М. 1967

[2] Карчицка, Д.Л.: За матриците aP+bE, Год. збор. Матем. фак., 31, 1980, Скопје

[3] Карчицка, Д.Л.: Чебишевски точки на системот a(nP+E)x=d, Год. збор. Матем. фак., 32, 1981, Скопје

[4] Lemke, C.E.: Complementary Problems, Nonlinear Programming, Proc. Sym. Univ. of Wisc., Acad. Press. N.Y., 1970

[5] Parsons, T.D.: Applications of Principal Pivoting, Proc. of the Princ. Sym. on Math. Prog., Princ. Univ. Press., N.Y., 1970

[6] Tucker, A.W.: Principal Pivotal Transforms of Square Matrices, SIAM Review 5, 1963


## ON A CLASS OF LINEAR SYSTEMS

D.L. Karčicka

### S u m m a r y


For a given real number a and an integer $n \geq 2$, $D(a,n)$ denotes the difference between the diagonal matrix $\mathrm{diag}(a^0,a^1,\dots,a^{n-1})$ and the matrix E, whose elements are all 1. In the case when $a \neq 0,-1$, or $a=-1$ and $n=2m$, $D(a,n)$ is nonsingular with inverse

$$D^{-1}(a,n) = \frac{1}{s}\left[d_{ij}\right], \quad s = \sum_{j=0}^{n-2} a^j, \quad d_{ij} = \begin{cases} (s-a^{n-i})/a^{i-1}, & i=j \\ -a^{n-i-j+1}, & i \neq j \end{cases}$$

So, the systems

$$D(a,n)x = d;$$

$$D(a,n)x = d, \quad x \geq 0$$

and their dual systems can be solved directly. For the inconsistent system $D(-1,2m+1)x = d$ the Chebyshev distance and a Chebyshev point can be found applying the corresponding LP-problem.