ДВА НАЧИНА НА ИЗВЕДУВАЊЕ GRAM'овата ДЕТЕРМИНАНТА ОД ТРЕТИ РЕД

ВИКТОР ЈАНЕКОСКИ

1. Познато е дека квадратот на запремината V на паралелепипед на кој рабовите му се зададени со три некомпланарни вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ може да се изрази преку Gram'овата детерминанта од трети ред, образувана од истите вектори, така да е

$$V^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix} . \tag{1}$$

Во литературата постоат разни, главно три, методи за доаѓање до изразот за квадрат на запремината (1).

Една[1]), не најопшта, се состои во тоа запремината да се изрази преку детерминанта од трети ред во координатна форма, да се квадрира таков израз и од новодобиената детерминанта да се заклучи идентичност со (1). Слабата страна на оваа метода е што се оди посредно, преку координатна система, и што се зема во помош правилото за квадрирање на детерминанта од трети ред;

Втора[2]), најопшта, не се опира на никакви претходни резултати од скаларната алгебра; тука се тргнува од векторски производ на два векторски производа и по извесни трансформации како специјален случај следува (1). Слабоста ѝ е во тоа што е доста гломазна и што геометриската страна на проблемот не се истакнува; и

Трета[3]), геометриска, користи една модификација на

---

[1]) Да се види, на пример: M. Lagally, *Vektor - Rechnung*, 3. Aufl. Leipzig 1945, S. 30.

[2]) Да се види, на пример: Т. Анђелић, *Теорија вектора*, 2. изд., Београд, 1949, стр. 67.

[3]) Р. Кашанин, *Виша математика* I, 3. изд., Београд, 1949, стр. 50.

Lagrange'овиот идентитет во векторска форма, но до резултатот се доаѓа опирајќи се на теоријата на система од четири линеарни равенки со три непознати, до толку што се користи услов за решение на истата.

Во теоријата на векторите обикновено прво се изведува формулата за двојниот векторски производ, а потоа се зборува за запремината изразена преку Gram'овата детерминанта употребувајќи, при тоа, првите две — од посочените три — методи. Во ваквиот случај ќе покажеме, со користење на очигледниот *Lagrange*'ов идентитет за два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$(\vec{A}\times\vec{B})^2+(\vec{A}\cdot\vec{B})^2=\vec{A}^2\,\vec{B}^2 \tag{2}$$

и формулата за двојниот векторски производ на три вектора $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\,(\vec{C}\cdot\vec{A})-\vec{C}\,(\vec{A}\cdot\vec{B}), \tag{3}$$

а со помош на елементарни трансформации, дека ќе дојдеме до изразот за квадратот на запремината (1).

Од формулата за алгебарската вредност на запремината на паралелепипед,

$$V=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}),$$

со квадрирање добиваме:

$$V^2=[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]^2$$

од каде, применувајќи го идентитетот (2) на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}\times\vec{c}$,

$$V^2=\vec{a}^2\,(\vec{b}\times\vec{c})^2-[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]^2$$

или, врз основа формулата (3),

$$V^2=\vec{a}^2\,(\vec{b}\times\vec{c})^2-[\vec{b}^2\,(\vec{c}\cdot\vec{a})^2-2\,(\vec{b}\cdot\vec{c})\,(\vec{c}\cdot\vec{a})\,(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{c}^2\,(\vec{a}\cdot\vec{b})^2].$$

Со повторна примена на (2) на векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$ во изразот $(\vec{b}\times\vec{c})^2$, имаме:

$$V^2 = \vec{a}^2 [\vec{b}^2 \vec{c}^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2] - [\vec{b}^2 (\vec{c} \cdot \vec{a})^2 - 2 (\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{c} \cdot \vec{a}) (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{c}^2 (\vec{a} \cdot \vec{b})^2]$$

кое, очигледно, може да се напише и во облик

$$V^2 = \vec{a}^2 [\vec{b}^2 \vec{c}^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2] + (\vec{a} \cdot \vec{b}) [(\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}^2]$$

$$+ (\vec{c} \cdot \vec{a}) [(\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{b} \cdot \vec{c}) - (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b}^2]$$

или, најпосле, како

$$V^2 = (\vec{a} \cdot \vec{a}) \begin{vmatrix} \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{vmatrix} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \begin{vmatrix} \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{a} \\ \vec{c} \cdot \vec{c} & \vec{c} \cdot \vec{a} \end{vmatrix} + (\vec{a} \cdot \vec{c}) \begin{vmatrix} \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} \end{vmatrix},$$

што и сакавме да докажеме.

2. Ќе покажеме сега, без воведување поимот за двоен векторски производ и трансформационата формула (3) што му одговара, елементарна геометриска метода која доведува до G r a m'овата детерминанта. При тоа ќе го користиме само *Lagrange*'овиот идентитет (2) запишан во детерминантна форма (10) и решение на система од две линеарни равенки со две непознати со што проблемот значително се упростува.

Земајќи за алгебарската вредност на запремината V на паралелепипедот:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}, \tag{4}$$

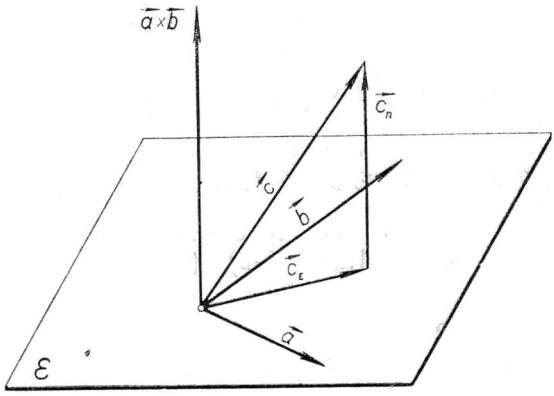
со делимично развивање и квадрирање добиваме

$$V^2 = (\vec{a} \times \vec{b})^2 \vec{c}^2 \cos^2 (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}), \tag{5}$$

со што проблемот се сведува на одредување косинусот на аголот $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$. Од приложената слика[1] се гледа дека е

---

[1]) На сликата е нацртана десната тројка од векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; јасно е дека излагањето не зависи од ориентација на тројката $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



(6) $$\cos^2(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}) = \sin^2(\vec{c}_\varepsilon,\vec{c}),$$

каде што векторот[1])

(7) $$\vec{c}_\varepsilon = \vec{c} - \vec{c}_n$$

е ортогонална проекција на векторот $\vec{c}$ на рамнината ε определена со неколинеарните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $\vec{c}_n$ е вектор нормален на истата рамнина.

Врз основа определението, векторот $\vec{c}_\varepsilon$ е компланарен[2]) со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пак може еднозначно да се разложи по нив така да е

(8) $$\vec{c}_\varepsilon = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b};$$

λ и μ се неодредени скалари кои се одредуваат од системата на равенките

---

[1]) Се претполага дека векторот $\vec{c}$ не е колинеарен со векторот $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{c}_\varepsilon \neq 0$; ако тоа не е случај, тогаш е $\cos^2(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}) = 1$, пак од (5) имаме $V^2 = (\vec{a}\times\vec{b})^2\,\vec{c}^2$.

[2]) Случајот кога е векторот $\vec{c}$ компланарен со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}_\varepsilon = \vec{c}$, не прави никакви тешкотии, оти равенството (6) е одржано.

$$\vec{c}_\varepsilon \cdot \vec{a} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{a}) + \mu(\vec{b}\cdot\vec{a}),$$

(9)

$$\vec{c}_\varepsilon \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \mu(\vec{b}\cdot\vec{b})$$

која се добива од векторната равенка (8) со скаларно множење на последната со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Како е дискриминантата на системата (9),

(10)
$$\Delta = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix} = (\vec{a}\times\vec{b})^2,$$

поради неколинеарноста на векторите[1]) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ секогаш позитивна, имајќи ги во предвид релациите

$$\vec{c}_\varepsilon \cdot \vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a},$$

$$\vec{c}_\varepsilon \cdot \vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{b}$$

кои следуваат од равенката (7) со скаларно множење на истата со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за λ и μ се добиваат решенија:

(11)
$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \mu = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

каде што се

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}.$$

---

[1]) За случај колинеарноста на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, или е равенката (8) невозможна ($\vec{c}_\varepsilon$ не е колинеарен со $\vec{a}$ или $\vec{b}$) или разложувањето по $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не е еднозначно ($\vec{c}_\varepsilon$ е колинеарен со $\vec{a}$ или $\vec{b}$); тогаш од (4) следува $V=0$.

Тргнувајќи од

$$\cos^2(\vec{c}_\varepsilon, \vec{c}) = \frac{(\vec{c}_\varepsilon \cdot \vec{c})^2}{\vec{c}_\varepsilon^{\,2}\,\vec{c}^2}$$

и опирајќи се на релацијата

$$\vec{c}_\varepsilon^{\,2} = \vec{c}_\varepsilon \cdot \vec{c}$$

која се добива со скаларно множење равенката (7) со векторот $\vec{c}_\varepsilon$, имаме:

$$\cos^2(\vec{c}_\varepsilon, \vec{c}) = \frac{\vec{c}_\varepsilon \cdot \vec{c}}{\vec{c}^2}$$

односно, спрема (8) и (11)

$$\cos^2(\vec{c}_\varepsilon, \vec{c}) = \frac{\Delta_1(\vec{a}\cdot\vec{c}) + \Delta_2(\vec{b}\cdot\vec{c})}{\Delta\,\vec{c}^2}. \tag{12}$$

Од равенството (6), за (5) сега добиваме:

$$V^2 = (\vec{a}\times\vec{b})^2\,\vec{c}^2\,[1 - \cos^2(\vec{c}_\varepsilon, \vec{c})]$$

од каде, заместувајќи $\cos^2(\vec{c}_\varepsilon, \vec{c})$ од (12), а врз основа на *Lagrange*'овиот идентитет (10),

$$V^2 = \Delta\,\vec{c}^2 - \Delta_1(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \Delta_2(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

или во посиметричен облик

$$V^2 = (\vec{c}\cdot\vec{a})\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \end{vmatrix} + (\vec{c}\cdot\vec{b})\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{a} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{a} \end{vmatrix} + (\vec{c}\cdot\vec{c})\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix},$$

што е идентично со (1).

Од составот на Gram'овата детерминанта лесно се уочува дека формулата (1) останува во важност и во случаевите:

1° ако е векторот $\vec{c}$ нормален на рамнината од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (забелешка[1]), страна 4;) и

2° ако се $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни вектори (забелешка[1]), страна 5),

т. е. она е исправна за секој возможен распоред на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Résumé

DEUX MODES D'ÉVALUATION D'UN DÉTERMINANT DE GRAM

Par
VIKTOR JANEKOSKI

Dans cette Note on indique deux procédés vectoriels simples fournissant le développement du déterminant du troisiéme ordre du type de Gram

$$G \equiv \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix} .$$
