Математички Билтен
15 (XLI)
1991 (49-57)
Скопје, Југославија

АРЕОЛАРНА ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА И ЕДНА НЕЈЗИНА ПРИМЕНА ЗА РЕШАВАЊЕ НА АРЕОЛАРНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Борко Илиевски

Во првиот дел од оваа работа се проучени егзистенцијата и некои својства на ареоларната лапласова трансформација L_A, воведена во трудот [1], за потоа да се дефинира и инверзна лапласова трансформација L_A^{-1}.

Во вториот дел од работата е укажано на една интересна можност за примена на L_A и L_A^{-1} врз решавање ареоларни линеарни диференцијални равенки, коишто се третирани во голем број трудови како на пример во [2], [3] и др. Имено, сметајќи дека решението $W=W(z,\bar{z})$ на ареоларната линеарна равенка (15) е слика на некоја функција - оригинал $\omega=\omega(z,t)$ со комплексен параметар z и, применувајќи ја прво инверзната трансформација L_A^{-1} над (15), се наоѓа ω за потоа со примена над ω на трансформацијата L_A да се добие решението W на споменатата ареоларна линеарна равенка.

Комплексна функција f од реална променлива t $(t > 0)$ се вика <u>оригинал</u>, ако се исполнети условите:

1° f заедно со своите изводи до n-ти ред се по делови непрекинати,

2° $f(t) = 0$ за $t < 0$,

3° постојат реални броеви $M > 0$ и $s > 0$, така што

$$|f(t)| < Me^{st}.$$

Пресликувањето $L: f(t) \to F(t)$, дефинирано со равенството

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt = F(z), \quad (z\in\mathbb{C}), \qquad (1)$$

се вика <u>лапласова трансформација</u>.

Функцијата $F=F(z)$ се вика <u>лапласова слика</u> на $f=f(t)$, а интегралот во (1) се вика <u>лапласов интеграл</u>.

Познато е дека лапласовата слика F на функцијата оригинал f е определена и аналитична функција од z во полурамнината $\mathrm{Re}z \ge a > s$ [4].

Во работата [1] е дефинирана т.н. ареоларна лапласова трансформација преку равенството

$$L_A(f(t)) = \int_0^\infty e^{-\bar{z}t} f(t)dz = F_A(z) \tag{2}$$

$F_A=F_A(z)$ се вика ареоларна лапласова слика на f, а интегралот во (2) ареоларен лапласов интеграл.

Од (1) и (2) се добива врската

$$F_A(z) = F(\bar{z}) \tag{3}$$

што постои помеѓу лапласовата слика F и ареоларната лапласова слика F_A на една иста функција f.

Теорема 1. Ако f е функција оригинал, тогаш ареоларниот лапласов интеграл (2) конвергира во полурамнината $\{z:\mathrm{Re}z \geq a > s\}$.

Доказ.

$$\left|\int_0^\infty e^{-\bar{z}t} f(t)dt\right| \leq \int_0^\infty |e^{-\bar{z}t}|\cdot|f(t)|dt <$$

$$< \int_0^\infty |e^{-(x-iy)t}|Me^{st}dt = M\int_0^\infty e^{-xt}e^{st}dt \leq$$

$$\leq M\int_0^\infty e^{-at}e^{st}dt = M\int_0^\infty e^{-(a-s)t}dt =$$

$$= M.\frac{e^{-(a-s)t}}{-(a-s)}\Bigg|_0^\infty = M\left[\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-(a-s)t}}{-(a-s)} - \frac{1}{-(a-s)}\right] =$$

$$= \frac{M}{a-s}.$$

Значи, ареоларниот лапласов интеграл се мајорира со интеграл што постои во полурамнината Re$z \geq a > s$, т.е. тој конвергира во споменатата полурамнина.

Теорема 2. Ареоларната лапласова слика $F_A=F_A(z)$ е аналитична функција од z.

Доказ. Согласно претходната теорема, ареоларната лапласова слика F_A е определена во која било полурамнина Re$z \geq a > s$. Ареоларниот лапласов интеграл можеме да го третираме како неправ интеграл со параметар $\bar{z}$. Интегралот што се добива од него со диференцирање по параметарот $\bar{z}$ конвергира рамномерно по однос на $\bar{z}$ во полурамнината $\mathrm{Re} z \geq a > s$, бидејќи се мајорира со конвергентен интеграл што не зависи од $\bar{z}$:

$$\left|\int_0^\infty e^{-\bar{z}t}(-t)f(t)dt\right| \leq \int_0^\infty |e^{-(x-iy)t}|\cdot|t|\cdot|f(t)|dt <$$

$$< \int_0^\infty e^{-xt}tMe^{st}dt \leq M\int_0^\infty e^{-at}e^{st}tdt =$$

$$= M\int_0^\infty e^{-(a-s)t}tdt =$$

$$= M\left(-t\,\frac{e^{-(a-s)t}}{a-s}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-(a-s)t}}{a-s}dt\right) =$$

$$= M\int_0^\infty \frac{e^{-(a-s)t}}{a-s}dt = -M\,\frac{e^{-(a-s)t}}{(a-s)^2}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{M}{(a-s)^2}.$$

Според тоа, може да се диференцира по параметарот $\bar{z}$ под знак на неправ интеграл со бесконечна горна граница, поради што е точно равенството

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\int_0^\infty e^{-\bar{z}t}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\bar{z}}(e^{-\bar{z}t}f(t))dt = \int_0^\infty e^{-\bar{z}t}f(t)(-t)dt,$$

што од своја страна повлекува постоење на изводот

$$\frac{\partial F_A(z)}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\int_0^\infty e^{-\bar{z}t}f(t)dt = \frac{\partial F(\bar{z})}{\partial\bar{z}} = F'(\bar{z}).$$

Следствено F_A и F се аналитични функции од $\bar{z}$.

Од друга страна

$$\frac{\partial F_A(z)}{\partial z} = \frac{\partial F(\bar{z})}{\partial z} = 0,$$

поради што F_A е антианалитична функција од z [5].

<u>Теорема 3</u>. Нека $L_A(f(t))=F_A(z)$, $L_A(g(t))=G_A(z)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ и $a > 0$. Точни се равенствата:

$$L_A(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha F_A(z) + \beta G_A(z) \tag{4}$$

$$L_A(e^{\alpha t} f(t)) = F_A(z-\overline{\alpha}) \tag{5}$$

$$L_A(f(at)) = \frac{1}{a}F_A\left(\frac{z}{a}\right) \tag{6}$$

$$L_A(f(t-a)) = e^{-a\overline{z}}F_A(z) \tag{7}$$

$$L_A(f(t+a)) = e^{a\overline{z}}\left(F_A(z)-\int_0^a f(t)e^{-\overline{z}t}dt\right) \tag{8}$$

$$L_A(f^{(n)}(t)) = \overline{z}^n F_A(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^{n-k-1} f^{(k)}_{(0)} \tag{9}$$

$$L_A\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F_A(z)}{\overline{z}} \tag{10}$$

$$L_A(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{\partial^n F_A(z)}{\partial \overline{z}^n} \tag{11}$$

$$L_A\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_{\overline{z}}^{\infty} F_A(u)d\overline{u} \tag{12}$$

<u>Доказ</u>. За илустрација ќе бидат дадени докази на равенствата (4), (5) и (9), а точноста на преостанатите равенства може да се провери на сличен начин.

Имаме

$$\begin{aligned} L_A(\alpha f(t)+\beta g(t)) &= \int_0^\infty e^{-\overline{z}t}(\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \\ &= \alpha\int_0^\infty e^{-\overline{z}t}f(t)dt + \beta\int_0^\infty e^{-\overline{z}t}g(t)dt = \\ &= \alpha F_A(z) + \beta G_A(z). \end{aligned}$$

Слично,

$$L_A(e^{\alpha t}f(t)) = \int_0^\infty e^{-\overline{z}t}e^{\alpha t}f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\overline{z}-\alpha)t}f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\overline{(z-\overline{\alpha})}t}f(t)dt = F_A(z-\overline{\alpha}).$$

При доказот на равенството (9), којшто се одвива со индукција по n, се претпоставува дека функцијата f и нејзините изводи до n-ти ред се оригинали. За n=1, имаме

$$L_A(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-\overline{z}t}f'(t)dt = e^{-\overline{z}t}f(t)\Big|_0^\infty + \overline{z}\int_0^\infty e^{-\overline{z}t}f(t)dt =$$

$$= -f(0) + \overline{z}L_A(f(t)) = \overline{z}F_A(z) - f(0).$$

Претпоставка: Формулата (9) е точна за n > 1. За n+1, имаме

$$L_A(f^{(n+1)}(t)) = \int_0^\infty e^{-\overline{z}t}f^{(n+1)}(t)dt =$$

$$= e^{-\overline{z}t}f^{(n)}(t)\Big|_0^\infty + \overline{z}\int_0^\infty e^{-\overline{z}t}f^{(n)}(t)dt =$$

$$= -f^{(n)}_{(0)} + \overline{z}L_A(f^{(n)}(t)) =$$

$$= -f^{(n)}_{(0)} + \overline{z}\left[\overline{z}^nF_A(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^{n-k-1}f^{(k)}_{(0)}\right] =$$

$$= \overline{z}^{n+1}F_A(z) - \sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^{n-k}f^{(k)}_{(0)} - f^{(n)}_{(0)} =$$

$$= \overline{z}^{n+1}F_A(z) - \sum_{k=0}^{n}\overline{z}^{(n+1)-k-1}f^{(k)}_{(0)}.$$

Со помош на равенството (2) и на равенствата од теоремата 3, лесно се составува следнава табела на ареоларни лапласови трансформации од некои елементарни функции оригинали f(t)

	$f(t)$	$L_A(f(t))=F_A(z)$
1	a	$\frac{a}{\overline{z}}$
2	e^{kt}	$\frac{1}{\overline{z}-k}$ $(k > 0)$
3	$\sin at$	$\frac{a}{\overline{z}^2+a^2}$
4	$\cos at$	$\frac{\overline{z}}{\overline{z}^2+a^2}$
5	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{\overline{z}^2-a^2}$
6	$\operatorname{ch} at$	$\frac{\overline{z}}{\overline{z}^2-a^2}$
7	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{\overline{z}+a}{(\overline{z}+a)^2+b^2}$
8	$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(\overline{z}+a)^2+b^2}$
9	t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{\overline{z}^{a+1}}$
10	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{\overline{z}^{n+1}} = \frac{n!}{\overline{z}^{n+1}}$
11	$t^a e^{bt}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(\overline{z}-b)^{a+1}}$
⋮	⋮	⋮

Од теоријата на лапласова трансформација е познато дека

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \iff f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)dp.$$

Ако ставиме $p=\overline{z}$, имаме

$$F(\overline{z}) = \int_0^\infty e^{-\overline{z}t} f(t)dt \iff f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{\overline{z}t}F(\overline{z})d\overline{z},$$

т.е.

$$F(\overline{z}) = L_A(f(t)) = F_A(z) \iff f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{\overline{z}t}F_A(z)d\overline{z}.$$

Формулата

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{\overline{z}t}F_A(z)d\overline{z} \tag{13}$$

го дава начинот за определување на оригиналот f на ареоларната лапласова трансформација кога е позната сликата F_A. Оваа формула дефинира т.н. инверзна ареоларна лапласова трансформација и пишуваме

$$L_A^{-1}(F_A(z)) = f(t).$$

Од формулата (13) се уочува да ако две функции-оригинали имаат една иста ареоларна лапласова слика, тогаш тие се совпаѓаат во секоја точка t во која се непрекинати.

Поради тоа што

$$L_A(f(t)) = F_A(z) \Leftrightarrow L_A^{-1}(F_A(z)) = f(t) \tag{14}$$

јасно е дека претходно наведената табела може да послужи и за определување на оригиналот f при позната ареоларна лапласова слика F_A.

Сега, да видиме, како може да се примени ареоларната лапласова трансформација L_A и нејзе инверзната L_A^{-1} при решавање на некои ареоларни линеарни диференцијални равенки

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^{n-k}W}{\partial\overline{z}^{n-k}} = F(\overline{z}) \tag{15}$$

каде што $a_k=a_k(z)$ $(k=1,2,\dots,n)$ се аналитични функции од $z=x+iy$, $a_o=1$ и $F=F(\overline{z})$ аналитична функција од $\overline{z}=x-iy$.

Познато е дека при ареоларниот извод $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}$ величината z се однесува како константа, поради што $W=W(z,\overline{z})$ во (15) може да се смета за функција од $\overline{z}$ со параметар z.

Бидејќи досега проучената ареоларна лапласова трансформација L_A, комплексна функција од реална променлива пресликува во комплексна функција од комплексна променлива, а F и W се комплексни функции од комплексна променлива $\overline{z}$, следува дека F и W може да се земат за ареоларни лапласови слики на некои функции-оригинали, т.е.

$$F(\bar{z}) = L_A(f(t)) \tag{16}$$
$$W(z,\bar{z}) = L_A(\omega(z,t))$$

z - параметар.

Користејќи ја формулата (11) од теоремата 3, имаме

$$L_A(t^k\omega(z,t)) = (-1)^k \frac{\partial^k W(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}^k},$$

т.е.

$$\frac{\partial^k W(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}^k} = (-1)^k L_A(t^k\omega(z,t)) \tag{17}$$

(k=1,2,...,n).

Согласно со формулите (16) и (17), ареоларната линеарна равенка (15) го добива обликот

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k L_A(t^{n-k}\omega(z,t)) = L_A(f(t)).$$

Со примена над последното равенство на инверзна ареоларна лапласова трансформација, се добива алгебарска равенка по оригиналот

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k t^{n-k}\omega(z,t) = f(t) \quad (a_0=0)$$

од каде што

$$\omega(z,t) = \frac{f(t)}{\sum_{k=0}^{n} a_k(-t)^{n-k}}$$

или, ставајќи

$$P_n(-t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(-t)^{n-k}, \tag{18}$$

$$\omega(z,t) = \frac{f(t)}{P_n(-t)}. \tag{19}$$

Со формулата (19) е определена комплексна функција ω од реална променлива t, при што z - параметар, чијашто ареоларна лапласова слика W е решение на ареоларната линеарна равенка (15). Значи

$$W(z,\overline{z}) = L_A(\omega(z,t)) = L_A\left(\frac{f(t)}{P_n(-t)}\right) \quad (20)$$

е решение на ареоларната равенка (15).

Треба да забележиме дека (18) е карактеристичен полином по -t на соодветната хомогена ареоларна линеарна диференцијална равенка на равенката (15). Од неговите корени како и́ од f(t) ќе зависи и́ обликот на решението (20) на ареоларната равенка (15).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д.Димитровски, М.Рајовиќ: За физичката смисла и техничкото значење на ареоларните лапласови трансформации, Матем. Билтен 11-12 (XXXVII-XXXVIII) 1987-1988, Скопје, 13-22

[2] D.Dimitrovski, B.Ilievski: L'équation différentielle aréolaire de Laplace et la possibilité de l'introduction des transformations de Laplace aréolaires, Punime matematike, No 1 (1986), 17-25, Priština

[3] J.Кечкиќ: О једној класи парцијалних једначина, Математички весник, 6(21), Београд, 1969

[4] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат: Методы теорий функций комплексного переменного, "Наука", Москва, 1987

[5] Г.Н.Положий: Обопщение теорий аналитических функций комплексного переменного, Киев, 1965

АРЕОЛЯРНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ЛАПЛАССА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ НА ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯ n-ТОГО ПОРЯДКА

Борко Илиевски

Резюме

В первой части этой работы изучаются некоторые особености так называемой ареолярной Лапласовой трансформации L_A (2), сформулированой первый раз в работе [1].

В второй части она применяется для интегрирования линейного ареолярного дифференциального уравнения n-того порядка (15). При этом получено его решение в виде (20).

Отметим что уравнение вида (15) исследовано в работах [2], [3] и других.