Математички Билтен
37(LXIII) No. 1
2013(5-24)
Скопје, Македонија

ISSN 0351-336X (print)
ISSN 1857-9914 (online)
UDC: 517.923:517.926

SUR LES PROBLÈMES DE POSSIBILITÉ ET DE L'IMPOSSIBILITÉ D'OBTENIR EFFECTIVEMENT DES SOLUTIONS PARTICULIÈRES DE L'ÉQUATION DE RICCATI

ANDRZEJ KAPCIA

Résumeé. En profitant de méthode de l'intégrale particulière pour l'équation de Riccati présentée symboliquement dans [10] et appliquée antérieurement dans le travail [7] on faire la discussion sur la possibilité d'obtenir les nouvelles généralisations d'intégrabilité effective de l'équation (0.1). Dans ce but, on profit des résultats obtenus dans le travail [7] et de l'équation d'Euler du second ordre parce que parmi ces équations existe une correspondance. On montre qu'ils existent 90 classes d'équations plus générales que l'équation de Riccati qui corresponde à l'équation d'Euler du second ordre et toutes ces équations sont effectivement intégrables. Dans le deuxième chapitre on étude les propriétés de l'équivalence des critères différentiels introduits par la méthode de l'intégrale particulière dans [7] en citant et démontrant les théorèmes: Th. 2.1 et Th. 2.2 qui déterminent leures réciproques rélations. Dans la troisième partie de ce travail, on construit l'exemple de l'équation de Riccati, qui peut être effectivement intégrable et telle pour laquelle cela est impossible. Pour cela on profit du théorème de J. Liouville pour l'équation spéciale de Riccati (Th. 3.2). Il existe continuum des conditions différentielles citées dans cette note, qu'on peut transformer à l'équation spéciale de Riccati pour laquelle le Th. de J. Liouville est obligatoire.

0. Introduction

Le but principal de ce travail est le problème de possibilité et impossibilité d'obtenir les solutions particulières de l'équation différentielle de Riccati sur la route effective. Dans le travail [10], p. 261-265, on présente la méthode de l'intégrale particulière (MIP) en forme opératorielle. Ses premières applications étaient annoncées dans les travaux [6], (1977) et [7], (1979) dans lesquels on présentait les résultats obtenus à l'aide de cette

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 34A05; Secondary 34A30.

méthode. On sait bien que l'équation classique de Riccati

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \tag{0.1}$$

où $a, b, c \in C$, et $a \neq 0$, on peut résoudre effectivement, si sa solution particulière est connue. Obtention donc de cette solution est la condition fondamentale pour donner sa solution générale (v. def. 0.1 en [10], p. 256-257 f.(0.5)). Cette méthode permet d'obtenir beaucoup de classes de l'équation de Riccati, plus générales que les équations données pour lesquelles ses solutions particulières sont connues et aussi les mêmes équations.

L'importance essentielle possèdent ici les fonctions $\mu_k(x), (k = 1, ...6)$, pour lesquelles on obtient les équations différentielles ou intégrales sur les fonctions $\mu_k(x)$. Ces équations décident sur la possibilité d'obtenir les fonctions $\mu_k(x)$ et par les mêmes les solutions particulières de l'équation (0.1).

On se montre que l'introduction les fonctions μ_k permet généraliser toutes de l'équation (0.1) pour lesquelles l'équation (0.1) possède la solution particulière connue. On peut donc obtenir tous les résultats qui sont présentés dans les livres et monographies [3-5, 13, 15-17], et aussi dans les travaux originaux [1, 2, 6, 7, 9, 10]. Dans le travail [11], p. 93, on donne les équations (0.1) qui sont partiellement effectivement intégrables et que cela - pour lui - est totalement impossibles (v. [11] , p. 93, f .: (0.1*), (0.1**)). Dans ce but, on profit du résultat de J. Liouville du travail [12] , v. aussi [3, 4] et [5], p. 43.

Dans ce travail-ci, on présente idée de cette méthode (MIP) et lui conséquence positive - chapitre I. Le chapitre II comprend le théorème fondamental avec sa démonstration. Chapitre III présente les corollaires qui résultent du Th. 2.1 pour l'équation de Riccati .

Remarquons que la méthode décrite (MIP), on applique aussi directement aux équations linéaires: l'équation du second et troisième ordre et aussi n-tième ordre (v. [8] et [10]). Elle permet obtenir les généralisations des équations citées ci-dessus effectivement intégrables. Il existe aussi d'autres méthodes de l'obtention telles équations, v. p.ex.: [1] et [14]. Le fait important est la remarque que des conditions intégrables, on peut obtenir tous les critères différentiels cités dans ce travail. Remarquons encore que dans les considérations du problème présenté ci-dessus - le rôle essentiel - joue ici l'équation spéciale de Riccati

$$y' = ay^2 + cx^\alpha, \tag{0.1'}$$

où $\alpha, a, c \in R$, $ac \neq 0$ et $x > 0$.

1. La méthode de l'intégrale particulière pour l'équation de Riccati

Cette méthode pour l'équation de Riccati (0.1) se fonde sur l'hypothèse de connaissance de sa solution particulière y_0, sur de profiter ses équations

$$R_{2k-1}(y) = R_{2k}(y), \quad (k = 1, ..., 6) \tag{0.1*}$$

ce que conduit à l'existence des fonctions continues $\mu_k (k = 1, \ldots, 6)$, déterminées par les égalités

$$R_{2k-1}(y_0) = \mu_k, \tag{1.1}$$

$$R_{2k}(y_0) = \mu_k \tag{1.2}$$

où

$$\begin{array}{ll} R_1(y) = y' - ay^2, & R_2(y) = by + c; \\ R_3(y) = y' - by, & R_4(y) = ay^2 + c; \\ R_5(y) = y' - c, & R_6(y) = ay^2 + by; \\ R_7(y) = y' - ay^2 - c & R_8(y) = by; \\ R_9(y) = y' - by - c, & R_{10}(y) = ay^2; \\ R_{11}(y) = y' & R_{12}(y) = ay^2 + by + c; \end{array} \tag{1.3}$$

sur de trouver les opérateurs inverses

$$\begin{array}{ll} R_1^{-1}(\mu_1) = - \begin{array}{l} \textit{impossible pour ob-} \\ \textit{tenir effectivement} \end{array}, & R_2^{-1}(\mu_1) = (\mu_1 - c)/b; \\ R_3^{-1}(\mu_2) = \exp\left(\int bdx\right) \int udx, & R_4^{-1}(\mu_2) = \mp\sqrt{(\mu_2 - c)/a}; \\ R_5^{-1}(\mu_3) = \int (\mu_3 + c)\, dx, & R_6^{-1}(\mu_3) = \mp\left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3}\right)/2a; \\ R_7^{-1}(\mu_4) = - \begin{array}{l} \textit{impossible pour ob-} \\ \textit{tenir effectivement} \end{array}, & R_8^{-1}(\mu_4) = \mu_4/b; \\ R_9^{-1}(\mu_5) = \exp\left(\int bdx\right) \int vdx, & R_{10}^{-1}(\mu_5) = \mp\sqrt{\mu_5/a}; \\ R_{11}^{-1}(\mu_6) = \int \mu_6 dx, & R_{12}^{-1}(\mu_6) = \left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4a\,(c - \mu_6)}\right)/2a; \end{array} \tag{1.4}$$

où $u = \mu_2 \exp\left(-\int bdx\right)$ et $v = (\mu_4 + c) \exp\left(-\int bdx\right)$ sur l'introduction des conditions d'intégrabilité effective en formes

$$R_{2k-1}\left(R_{2k}^{-1}(\mu_k)\right) = \mu_k\,, \tag{1.5}$$

$$R_{2k}\left(R_{2k-1}^{-1}(\mu_k)\right) = \mu_k\,, \tag{1.6}$$

où $y_0 = R_{2k}^{-1}(\mu_k)$ désigne les solutions symboliques de l'identité (1.2) et $y_0 = R_{2k-1}^{-1}(\mu_k)$ les solutions symboliques successives de l'identité (1.1) $(k = 1, \ldots, 6)$.

La condition (1.5) pour $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ prend successivement les formes explicites: (2.2), (3.4), (4.4), (5.2), (6.4) et (7.4) du travail [7]; et la condition (1.6) pour $k = 2, 3, 5, 6$ prend successivement les formes explicites (3.2), (4.2), (6.2) et (7.2) de [7]. Cette condition-ci pour $k =: 1, 4$ possède seulement l'importance symbolique.

Des conditions (1.5) et (1.6), on détermine - si cela est possible - les classes de l'équation (0.1) effectivement intégrables - c.-à-d. telles classes pour lesquelles les fonctions

$$y_0 = R_{2k}^{-1}(\mu_k) \tag{1.7}$$

$$y_0 = R_{2k-1}^{-1}(\mu_k) \tag{1.8}$$

sont respectivement leurs solutions particulières. On cite ces classes dans les corollaires II.1-VII.1 de [7] (quinze classes). Des formes d'identités (1.1) - (1.4) résulte qu'on peut obtenir les opérateurs inverses R_j^{-1} pour les nombres $j = 2, \dots, 6, 8, \dots, 12$, et que seulement dans le cas si $k = 1$ et $k = 4$, on ne peut pas obtenir effectivement des opérateurs R_{2k-1}^{-1} $(k =: 1, 4)$. Malgré cela, on peut donner les autres très générales conditions d'intégrabilité effective de l'équation (0.1) (cf.[7] p. 117, 123 les critères (2.4) et (5.5)). Ces dernières conditions ne possèdent pas la forme (2.4) pour $k =: 1, 4$, mais elles font certaines généralisations de conditions (1.5) pour les mêmes k.

Dans le travail [7] on donne 15 classes d'équation (0.1) pour lesquelles leurs solutions particulières sont en-là citées. Aux équations les plus générales obtenues dans [7] appartiennent les classes: (3.5), (3.7), (4.5), (4.6), (6.5), (7.5)- (7.7). Nous choisissons quelques d'elles: (3.5), (4.6), (6.5) et (7.7); et nous les signifions de nouveau:

$$y' = \frac{\mu_2 - c}{\exp\left(2\int b dx\right)\left\{\int \mu_2 \exp\left(-\int b dx\right) dx + K\right\}^2} y^3 + by + c, \tag{1.9}$$

$$y' = ay^2 + \frac{\mu_3 - a\left(\int (c+\mu_3) dx + K\right)^2}{\int (c+\mu_3) dx + K} y + c, \tag{1.10}$$

$$y' = \frac{\mu_5}{\exp\left(2\int b dx\right)\left\{\int (\mu_5 + c) \exp\left(-\int b dx\right) dx + K\right\}^2} y^2 + by + c, \tag{1.11}$$

$$y' = ay^2 + by + \mu_6 - a\left(\int \mu_6 dx + K\right)^2 - b\left(\int \mu_6 dx + K\right). \tag{1.12}$$

Remarquons que dans le travail [10] p. 262, on trouve le théorème:

Théorème 1.1. Soit y_0 une solution particulière de l'équation donnée (0.1) satisfaisant aux hypothèses suivantes: $a, b, c \in C_X$, a $c \neq 0, y_0 \neq 0$ et $\mu_2 \neq c, \mu_3 \neq -c, \mu_5 \neq c, \mu_6^2 + K^2 > 0$ sur X, alors: 1) on peut la construire au moins d'un des critères:

(B)

$$a(x) \exp\left(2\int b(x) dx\right) \left[\int \mu_2(x) \exp\left(-\int b(x) dx\right) + K\right]^2 - \mu_2(x) + c(x) = 0,$$

(C)

$$a(x)\left[\int (c(x) + \mu_3(x))\, dx + K\right]^2 + b(x)\left[\int (c(x) + \mu_3(x))\, dx + K\right] - \mu_3(x) = 0,$$

(E)

$$a(x) \exp\left(2\int b(x) dx\right) \left[\int (\mu_5(x) + c(x))\, dx + K\right]^2 - \mu_5(x) = 0,$$

(F)

$$a(x)\left[\int \mu_6(x) dx + K\right]^2 + b(x)\left[\int \mu_6(x) dx + K\right] + c(x) - \mu_6(x) = 0,$$

où K - Cte réelle arbitraire en trouvant la fonction $\mu_k(x), k = 2, 3, 5, 6$ et choisissant les constantes arbitraires (si cela est nécessaire); 2) on peut construire au moins l'une équation différentielle en forme (0.1) plus générale de l'équation donnée et possédant la même solution particulière y_0 ou la solution particulière y_0^* correspondant à l'équation généralisée.

Les critères (B), (C), (E), (F) sont satisfaits, si les fonctions (3.1), (4.1), (6.1), (7.1) de [7] signifiées maintenant par :

(B*) $\quad y_0 = \exp\left(b(x)dx\right)\left[\int \mu_2(x)\exp\left(-\int b(x)dx\right)dx + K\right],$

(C*) $\quad y_0 = \int \left(c(x) + \mu_3(x)\right)dx + K$

(E*) $\quad y_0 = \exp\left(\int b(x)dx\right)\left[\int \left(\mu_5(x) + c(x)\right)\exp\left(-\int b(x)dx\right)dx + K\right],$

(F*) $\quad y_0 = \int \mu_6(x)dx + K,$

où K - comme ci-dessus, sont les solutions particulières de l'équation donnée (0.1).

La démonstration du Th. 1.1 on trouve dans le travail [10] p. 263-264. Nous remarquons aussi que des critères (B), (C), (E) et (F) résultent les équations différentielles (1.9) - (1.12).

Remarquons que dans le travail [7], on donne 15 ressemblantes équations aux équations (1.9) – (1.12). Une parte de ces équations sont les équations intégrales et la seconde-les équations différentielles. Parmi ces équations on se trouve l'équation différentielle en forme

$$y' = \left(\frac{b(x)}{\mu_4(x)}\right)^2\left\{\left(\frac{\mu_4(x)}{b(x)}\right)' - c(x) - \mu_4(x)\right\}y^2 + b(x)y + c(x) \tag{1.13}$$

(v.[7], p. 122, l'équation (5.3)). Nous la profitons dans la suite.

Exemple 1.1. Pour obtenir les nouvelles généralisations effectivement intégrables de l'équation de Riccati nous pouvons profiter l'équation de Euler du second ordre

$$x^2u'' + pxu' + qu = 0 \text{ où } p, q \in R \tag{1.14}$$

qu'on peut dans tous les cas résoudre effectivement. En appliquant dans (1.14) la transformation en forme

$$u = C\exp\left(-\int \frac{y}{x^2}dx\right) \text{ où C - Ct e arbit.,} \tag{1.15}$$

nous obtenons l'équation de Riccati en forme

$$y' = x^{-2}y^2 + (2-p)x^{-1}y + q, \tag{1.16}$$

qui possède les solutions particulières obtenues par la transformation

$$y = -x^2u'/u, \tag{1.17}$$

où u - ce sont les solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation (1.14). Remarquons aussi que la substitution (1.17) transforme chaque équation (1.16) en l'équation (1.14). Cette transformation est donc biunivoque. Les solutions particulières linéaires indépendantes de l'équation (1.14) sont les fonctions:

$(1.18_1)\quad u_{01} = x^{r_1}, \qquad (1.18_2)\quad u_{02} = x^{r_2}\ ;$

$(1.19_1)\quad u_{03} = x^{r_0}, \qquad (1.19_2)\quad u_{04} = x^{r_0}\ln x\ ;$

$(1.20_1)\quad u_{05} = x^{r_0}\cos(\omega\ln x), \qquad (1.20_2)\quad u_{06} = x^{r_0}\sin(\omega\ln x);$

où et r_1 et r_2 sont les racines réelles de l'équation

$$r^2 + (p-1)r + q = 0, \tag{1.21}$$

où

$$r_1 = \frac{1}{2}\left((1-p) - \sqrt{\Delta}\right),\ r_2 = \frac{1}{2}\left((1-p) + \sqrt{\Delta}\right), \tag{1.22}$$

si $\Delta > 0$, $\Delta = (p-1)^2 - 4q$;

(1.23) $\qquad r_0 = \frac{1}{2}(1-p)$, si $\Delta = 0$;

(1.24) $\qquad u_{05} = \mathrm{Re} u_1 \quad u_{06} = \mathrm{Im} u_1$

si $\Delta < 0$ et $u_1 = x^{r_0} e^{i\omega \ln x}$, ou $\omega = \sqrt{q - {r_0}^2}$.

En profitant maintenant la substitution (1.17), d'après $(1.18_1) - (1.20_2)$ nous obtenons la suite des solutions particulières en formes:

$(1.25_1) \quad y_{01} = -r_1 x, \qquad (1.25_2) \quad y_{02} = -r_2 x,$

$(1.25_3) \quad y_{03} = -r_0 x, \qquad (1.25_4) \quad y_{04} = -r_0 x - x\ln^{-1}(x),$

$(1.25_5) \quad y_{05} = \omega x tg(\omega \ln x) - r_0 x, \quad (1.25_6) \quad y_{06} = -(\omega x ctg(\omega \ln x) + r_0 x),$

où r_1, r_2, r_0, ω sont déterminés par les formules (1.22) – (1.24).

Parce que nous avons obtenu six différentes solutions particulières (1.25_1)–(1.25_6) et dans le travail [7] , nous avons donné 15 équations dans lesquelles figurent les fonctions $\mu_k (k = 1, \ldots, 6)$, alors nous pouvons construire 90 équations, qui sont plus générales que l'équation (1.16) et aussi effectivement intégrables. Comme exemple nous présentons la quatrième série de résolutions.

Parce que la solution particulière de l'équation (1.13) est la fonction

$(17^*) \qquad y_0 = \mu_4 / b(x),$

alors pour le cas special, où $b(x) = (2-p)/x$ et $c(x) = q$, nous avons

$(17^{**}) \qquad \mu_4 = \mu_{4k} = y_{0k}(2-p)/x, \quad (k = 1, ..., 6)$

où y_{0k} ce sont les fonctions $(1.25_1) - (1.25_6)$. Nous avons obtenu la suite finie des équations en forme

$(1.13_k) \qquad y' = (y_{0k})^{-2} \left\{ (y_{0k})' - q - \frac{2-p}{x} y_{0k} \right\} y^2 + \frac{2-p}{x} y + q,$

où y_{0k} ce sont les solutions particulières de cette équation. Nous avons obtenu la correspondance parmi l'équation (1.14) et l'équation (1.13_k), qui est effectivement intégrable. Cela finit cet exemple.

Nous remarquons que l'équation considéré dans cet exemple n'est pas l'équation linéaire à coefficients arbitraires.

2. Les connexions parmi les critères intégraux et différentiels publiées dans le travail [7]

Nous remarquons que dans le travail [7], on donne 12 critères de l'intégrabilité effective de l'équation de Riccati (0.1). Regardons que dans [7] - six critères ce sont les critères intégraux, et six restants - ce les critères différentiels. Des critères intégraux - comme nous cela verrons - on peut chaque fois obtenir les critères différentiels. Au commencement nous introduisons le système des hypothèses suivantes:

Hypothèse A. Les fonctions

(2.1) a, b, c, $\mu_k \in C^1_x (k = 1, \ldots, 6), abc \neq 0$, sur X, (a, b, c - les coefficients de l'équation (0.1), μ_k - les fonctions arbitraires réelles) ;

(2.2) $c-\mu_1 \neq 0,\ (\mu_2-c)/a>0,\ -b\mp\sqrt{\Delta_1}\neq 0,\quad \Delta_1=b^2+4a\mu_3\geq 0,$
$\mu_4\neq 0,\ \mu_5/a>0,\quad -b\mp\sqrt{\Delta_2}\neq 0\quad et\quad \Delta_2=b^2+4a\left(\mu_6-c\right)\geq 0$
sur X;

(2.3) $b\neq 0$ sur X.

<u>Hypothèse B</u>. Les fonctions a, b, c, et μ_k, satisfont à peu près toutes les conditions (2.1) et (2.2) d'Hypothèse A et le coefficient $b(x)$ de l'équation (0.1) satisfait à la condition

(2.4) $b(x)\equiv 0$ sur X

Pour les critères du travail [7] nous avons le théorème:

Théorème 2.1. Si les coefficients de l'équation (0.1) satisfont L'Hypothèse A, alors les critères intégraux:

(A) $b\big(\int adx+K\big)^{-1}+(\mu_1-c)\left\{1+\big(\int adx+K\big)^{-1}\int\frac{\mu_1 b^2}{(\mu_1-c)^2}dx\right\}=0$,

(B) $a\exp\left(2\int bdx\right)\left[\int\left(\mu_2\exp\left(-\int bdx\right)\right)dx+K\right]^2-\mu_2+c=0,$

(C) $a\big[\int\left(c+\mu_3\right)dx+K\big]^2+b\left[\int\left(c+\mu_3\right)dx+K\right]+\mu_3=0,$

où K - Cte arbitraire réelle,

(D) $\int adx+K+\frac{b}{\mu_4}+\int\frac{(c+\mu_4)b^2}{\mu_4}dx=0,$

(E) $a\exp\left(2\int bdx\right)\left[\int\left(\mu_5+c\right)\exp\left(-\int bdx\right)dx+K\right]^2-\mu_5=0,$

(F) $a\big[\int\mu_6 dx+K\big]^2+b\left[\int\mu_6 dx+K\right]+c-\mu_6=0,$

on peut transformer successivement en les critères différentiels:

(G) $\left[\left(\mu_1-c\right)/b\right]_x'-a\left[\left(\mu_1-c\right)/b\right]^2-\mu_1=0,$

(H) $\mp\left[\sqrt{\left(\mu_2-c\right)/a}\right]_x'\pm b\sqrt{\left(\mu_2-c\right)/a}-\mu_2=0,$

(I) $\left[\left(-b\mp\sqrt{b^2+4a\mu_3}\right)/2a\right]_x'-c-\mu_3=0$

(J) $\left[\frac{\mu_4}{b}\right]_x'-a\left[\frac{\mu_4}{b}\right]^2-c-\mu_4=0,$

(K) $\mp\left[\sqrt{\mu_5/a}\right]_x'\pm b\sqrt{\mu_5/a}-c-\mu_5=0,$

(L) $\left[\left(b\pm\sqrt{b^2-4a\left(c-\mu_6\right)}\right)/2a\right]_x'+\mu_6=0,$

définies sur X. Tous les critères différentiels (G)-(L) sont équivalents.

Remarque 2.1. Les critères (A) - (F) ce sont précisément les critères successives (2.4), (3.2), (4.2), (5.5), (6.2), (7.2) du travail [7], et les critères (G) - (L) ce sont successivement les critères (2.2), (3.4), (4.4), (5.2), (6.4) et (7.4) du même travail.

<u>Démonstration du Th.2.1.</u>. Nous faisons la démonstration dans deux pas. I) Nous démontrons que des critères (A) - (F) résultent les critères (G) - (L). II) nous démontrons que les critères différentiels sont équivalents.

I.1a) Considérons le critère (A) en lè traitant comme l'identité sur X. Nous avons

$$b\left(\int adx+K\right)^{-1}+(\mu_1-c)\left[1+\left(\int adx+K\right)^{-1}\int\frac{\mu_1 b^2}{(\mu_1-c)^2}dx\right]=0,$$

En devisant l'identité susdite par $\left(\int adx+K\right)^{-1}$ et d'àpres $\mu_1-c\neq 0$, nous obtenons

$$\frac{b}{\mu_1-c}+\int adx+K+\int\frac{\mu_1 b^2}{(\mu_1-c)^2}dx=0,$$

et différentiant l'identité obtenue par rapport à x, nous obtenons

$$\left[\frac{b}{\mu_1-c}\right]_x'+a+\frac{\mu_1 b^2}{(\mu_1-c)^2}=0.$$

En faisant maintenant les transformations algébriques, nous obtenons

$$\left[\left(\frac{\mu_1-c}{b}\right)^{-1}\right]_x'+a+\mu_1\left(\frac{\mu_1-c}{b}\right)^{-2}=0\ ,$$

et puis effectuant la différentiation et les opérations algébriques dans la dernière égalité, nous en obtenons le critère (G).

1b) Considérons maintenant la condition (B). Nous avons l'identité

$$a\exp\left(2\int bdx\right)\left[\int\left(\mu_2\exp\left(-\int bdx\right)\right)dx+K\right]^2-\mu_2+c=0,$$

de là, d'après les hypothèses (2.1)-(2.3) , nous avons

$$\left[\int\left(\mu_2\exp\left(-\int bdx\right)\right)dx+K\right]^2=((\mu_2-c)/a)\exp\left(-2\int bdx\right),$$

d'où

$$\int\left(\mu_2\exp\left(-\int bdx\right)\right)dx+K=\mp\sqrt{(\mu_2-c)/a}\exp\left(-\int bdx\right),$$

d'ici, d'après la différentiation et la réduction des expressions identiques, nous obtenons

$$\mu_2=\mp\left[\sqrt{(\mu_2-c)/a}\right]_x'\pm b\sqrt{(\mu_2-c)/a},$$

d'où résulte le critère (H).

1c) Le troisième critère c'est le critère (C). Donc nous avons l'identité

$$a\left[\int(c+\mu_3)dx+K\right]^2+b\left[\int(c+\mu_3)dx+K\right]+\mu_3=0$$

sur X. En mettant $\int(c+\mu_3)dx+K=0$ nous obtenons pour résoudre l'équation

$$av^2+bv+\mu_3=0,$$

de laquelle résulte que

$$v=\int(c+\mu_3)dx+K=\frac{-b\mp\sqrt{b^2+4a\mu_3}}{2a},$$

qui d'après les hypothèses (2.1)-(2.3) est bien déterminé et quelle peut différentier sur X. En faisant cela, nous obtenons

$$c+\mu_3=\left[\left(-b\mp\sqrt{b^2+4a\mu_3}\right)/2a\right]_x',$$

d'ici nous obtenons le critère (I).

1d) Le critère successif c'est le critère (D):

$$\int adx+K+\frac{b}{\mu_4}+\int\frac{(c+\mu_4)b^2}{{\mu_4}^2}dx=0.$$

D'après les hypothèses (2.1) et (2.2) l'identité susdite est bien déterminée et on peut la differentier. En le faisant, nous obtenons

$$a + \left[\frac{b}{\mu_4}\right]'_x + (c+\mu_4)\,(\mu_4/b)^{-2} = 0,$$

d'où

$$a + \left[(\mu_4/b)^{-1}\right]'_x + (c+\mu_4)\,(\mu_4/b)^{-2} = 0$$

De la dernière identité évidemment résulte le critère (J).

1e) Considérons à présent le critère (E). Nous avons donc l'identité

$$a\exp\left(2\int bdx\right)\left[\int(\mu_5+c)\exp\left(-\int bdx\right)dx+K\right]^2-\mu_5=0,$$

de laquelle, d'après les hypothèses (2.1) - (2.3) résulte que l'identité suivante

$$\left[\int(\mu_5+c)\exp\left(-\int bdx\right)dx+K\right]^2=(\mu_5/a)\exp\left(-2\int bdx\right)$$

a lieu. De là nous obtenons l'identité

$$\int(\mu_5+c)\exp\left(-\int bdx\right)dx+K=\mp\sqrt{\mu_5/a}\exp\left(-\int bdx\right).$$

En la différentiant par rapport à x, nous avons

$$\mu_5+c=\mp\left[\sqrt{\mu_5/a}\right]'_x\pm b\sqrt{\mu_5/a}.$$

Il est évident que de là, on obtient le critère (E).

1f) À la fin considérons le critère (F). Nous avons l'identité

$$a\left[\int\mu_6dx+K\right]^2+b\left[\int\mu_6dx+K\right]+c-\mu_6=0.$$

En substituant $v=\int\mu_6dx+K$ dans l'identité susdite, nous obtenons l'équation

$$av^2+bv+c-\mu_6=0,$$

d'où nous avons

$$v=\int\mu_6dx+K=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4a(c-\mu_6)}}{2a},$$

qui d'après les hypothèses (2.1) - (2.3) est bien déterminée et qu'on peut différentier par rapport à x. En le faisant, nous obtenons

$$\mu_6=\left[\left(-b\mp\sqrt{b^2-4a\,(c-\mu_6)}\right)/2a\right]'_x$$

De là résulte le critère (F). Cela finit la première partie de démonstration.

II. Dans cette partie de la démonstration, nous devons montrer que les critères différentiels (G) - (L) sont équivalents. Dans ce but nous profitons d'une suite des implications

(2.5) (G) $\Rightarrow$ (H) $\Rightarrow$ (I) $\Rightarrow$ (J) $\Rightarrow$ (K) $\Rightarrow$ (L) $\Rightarrow$ (G).

Pour faire ces démonstrations il est nécessaire de trouver les formes de la suite de fonctions

(2.6) $\mu_1(x),\mu_2(x),\mu_3(x),\mu_4(x),\mu_5(x),\mu_6(x).$

Ces fonctions figurent dans les critères (G) - (L) et dans les solutions citées au travail [7] ((2.1), (3.3), (4.3), (5.1), (6.3), (7.3)). Nous les citons en les signifiants de nouveau:

(2.7$_1$) $\quad y_{01}=(\mu_1-c)/b,$

(2.7$_2$) $\quad y_{02}=\mp\sqrt{(\mu_2-c)/a},$

(2.7$_3$) $\quad y_{03}=\left(-b\mp\sqrt{b^2-4a\mu_3}\right)/2a,$

(2.7$_4$) $\quad y_{04}=\mu_4/b,$

(2.7$_5$) $$y_{05} = \mp\sqrt{\mu_5/b},$$
(2.7$_6$) $$y_{06} = \left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4a\,(c-\mu_6)}\right)/2a.$$

D'après les hypothèses (2.1) - (2.3) elles sont toutes définies et différentiables sur X. Pour obtenir les dépendances parmi les fonctions μ_k et μ_l où $k \neq l$, nous résolvons la suite d'égalités

(2.7) $$y_{01} = y_{02}, \quad y_{02} = y_{03}, \quad y_{02} = y_{04}, \quad y_{04} = y_{05}, \quad y_{05} = y_{06}, \quad y_{06} = y_{01}.$$

En résolvant successivement les égalités (2.7) à l'aide de simples transformations algebriques, nous obtenons la suite de fonctions

(2.8$_1$) $$\mu_1 = \mp b\sqrt{(\mu_2 - c)/a} + c,$$
(2.8$_2$) $$\mu_2 = a\left[\left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3}\right)/2a\right]^2 + c,$$
(2.8$_3$) $$\mu_3 = a{\mu_4}^2/b^2 + \mu_4,$$
(2.8$_4$) $$\mu_4 = \mp b\sqrt{\mu_5/a},$$
(2.8$_5$) $$\mu_5 = a\left[\left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4a\,(c-\mu_6)}\right)/2a\right]^2,$$
(2.8$_6$) $$\mu_6 = a\left[(\mu_1 - c)^2/b^2\right] + \mu_1.$$

Maintenant nous profitons des formes de fonctions $\mu_k (k = 1, \ldots, 6)$ dans les démonstrations des implications (2.5).

2g) Écrivons le critère (G) et en l'appliquons la fonction. (2.8$_1$). Nous avons

$$\begin{aligned} G(x) &= [(\mu_1 - c)/b]'_x - a[(\mu_1 - c)/b]^2 - \mu_1 = \\ &= \left[\mp\sqrt{(\mu_2 - c)/a}\right]'_x - a\left[\mp\sqrt{(\mu_2 - c)/a}\right]^2 - \left[\mp b\sqrt{(\mu_2 - c)/a}\right] - c = \\ &= \mp\left[\sqrt{(\mu_2 - c)/a}\right]'_x - a(\mu_2 - c)/a \pm b\sqrt{(\mu_2 - c)/a} - c = \\ &= \mp\left[\sqrt{(\mu_2 - c)/a}\right]'_x \pm b\sqrt{(\mu_2 - c)/a} - \mu_2; \end{aligned}$$

Nous avons obtenu le côté gauche du critère (H). De là résulte que de (G) $\Rightarrow$ (H)

2h) Parce que dans le critère (H) l'expression $(\mu_2 - c)/a$ se répété, alors comptons sa valeur. En profitant de (2.8$_2$), nous avons

(2.9) $$\begin{aligned} \omega(x) = (\mu_2 - c)/a &= \left(a\left[\left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3}\right)/2a\right]^2 + c - c\right)/a = \\ &= \left[-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3}\right]^2/4a^2 = \left[\left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3}\right)/2a\right]^2 = \delta^2 \end{aligned}$$

où $\delta = \left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3}\right)/2a$. D'après le critère (H), nous remarquons que son côté gauche s'exprime en forme

(2.10) $$\begin{aligned} H(x) &= \mp\left[\sqrt{(\mu_2 - c)/a}\right]'_x \pm b\sqrt{(\mu_2 - c)/a} - \mu_2 \\ &= \mp\left[\sqrt{\delta^2}\right]'_x \pm b\sqrt{\delta^2} - a\delta^2 - c = \mp\left|\delta\right|'_x \pm b\left|\delta\right| - a\delta^2 - c, \end{aligned}$$

pour $\delta \in R$. De là résultent les formules

(2.10$_1$) $H(x) = -\delta'_x + b\delta - a\delta^2 - c$ si $\delta \geq 0$;
(2.10$_2$) $H(x) = -(-\delta)'_x + b(-\delta) - a\delta^2 - c = \delta'_x - b\delta - a\delta^2 - c$, si $\delta < 0$;
(2.10$_3$) $H(x) = +\delta'_x - b\delta - a\delta^2 - c$, si $\delta \geq 0$;
(2.10$_4$) $H(x) = +(-\delta)'_x - b(-\delta) - a^2 - c = -\delta'_x + b\delta - a\delta^2 - c$, si $\delta < 0$
Nous remarquons que les formules finales (2.10$_1$) et (2.10$_4$) ainsi que (2.10$_2$) et (2.10$_3$) sont identiques. Il suffit donc considérer deux d'elles: (2.10$_1$) et (2.10$_2$). D'après (2.9) et $\Delta = b^2 + 4a\mu_3$, pour (2.10$_1$) nous avons la formule suivante en forme développée

$$(2.10_1^*)\quad \begin{aligned} H(x) &= -\delta'_x + b\delta - a\delta^2 - c = -\delta'_x + b\left(-b \mp \sqrt{\Delta_1}\right)/2a + \\ &-a\left(-b \mp \sqrt{\Delta_1}\right)^2/4a^2 - c = -\delta'_x - b^2/2a \mp \left(\sqrt{\Delta_1}\right)/2a - b^2/2a \\ &\mp \left(\sqrt{\Delta_1}\right)/2a - 4a\mu_3/4a^2 - c = \\ &= -\left[\left(-b \mp \sqrt{\Delta_1}\right)/2a\right]'_x - b^2/a \mp \left(\sqrt{\Delta_1}\right)/a - \mu_3 - c; \end{aligned}$$

D'après (2.10$_1^*$) et le critère (H), nous obtenons la condition étrangée en forme

$$(2.11)\qquad \left[\frac{-b \mp \sqrt{b^2+4a\mu_3}}{2a}\right]'_x + \frac{b^2}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2+4a\mu_3}}{a} + \mu_3 + c = 0.$$

Cherchons maintenant la forme développée de la formule (2.10$_2$). Nous avons

$$(2.10_2^*)\quad \begin{aligned} H(x) &= \delta'_x - b\delta - a\delta^2 - c = \delta'_x - b\left(-b \mp \sqrt{\Delta_1}\right)/2a + \\ &-a\left(-b \mp \sqrt{\Delta_1}\right)^2/4a^2 - c = \\ &= \delta'_x + b^2/a \pm \left(\sqrt{\Delta_1}\right)/2a - b^2/2a \mp \left(\sqrt{\Delta_1}\right) - 4a\mu_3/4a^2 - c = \\ &= \left[\left(-b \mp \sqrt{\Delta_1}\right)/2a\right]'_x - \mu_3 - c; \end{aligned}$$

D'après (2.10$_2^*$) et le critère (H), nous obtenons le critère (I):

$$\left[\left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3}\right)/2a\right]'_x - c - \mu_3 = 0$$

pour chaque δ. Nous avons donc le corollaire: $(H) \Rightarrow (I)$.

2i) À présent considérons le critère (I). Au commencement calculons la valeur de l'expression $\sqrt{b^2 + 4a\mu_3}$ en profitant la fonction (2.8$_3$). Nous avons

$$(2.12)\quad \begin{aligned} \omega(x) &= \sqrt{b^2 + 4a\mu_3} = \sqrt{b^2 + 4a\left(a{\mu_4}^2/b^2 + \mu_4\right)} = \\ &= \sqrt{b^2 + 4a\mu_4 + 4a^2{\mu_4}^2/b^2} = \sqrt{\left(b + 2a\mu_4/b\right)^2} = \sqrt{\delta^2} = |\delta|, \end{aligned}$$

où $\delta = b + 2a\mu_4/b$. Ecrivons maintenant le côté gauche du critère (I). Nous avons

$$(2.13)\quad \begin{aligned} I(x) &= \left[\left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3}\right)/2a\right]'_x = \\ &= \left[\left(-b \mp \sqrt{\omega(x)}\right)/2a\right]'_x - c - \mu_3 = \\ &= \left[\left(-b \mp |\delta|\right)/2a\right]'_x - c - a{\mu_4}^2/b^2 - \mu_4, \end{aligned}$$

où δ comme ci-dessus. De là résultent les expressions suivantes
(2.13$_1$) $I(x) = \left[\left(-b - \delta\right)/2a\right]'_x - \gamma = \left(-b/a - \mu_4/b\right)'_x - \gamma$, si $\delta \geq 0$;

(2.13_2) $\quad I(x) = [(-b - (-\delta))/2a]'_x - \gamma = (\mu_4/b)'_x - \gamma$, si $\delta < 0$;
(2.13_3) $\quad I(x) = [(-b + \delta)/2a]'_x - \gamma = (\mu_4/b)'_x - \gamma$, si $\delta \geq 0$;
(2.13_4) $\quad I(x) = [(-b + (-\delta))/2a]'_x - \gamma = (-b/a - \mu_4/b)'_x - \gamma$, si $\delta < 0$,
où $\gamma = c + a{\mu_4}^2/b^2 + \mu_4$. Nous remarquons que les fragments finals des formules (2.13_1) et (2.13_4) ainsi que (2.13_2) et (2.13_3) sont identiques pour les convenables δ. De là et du fait que $I(x) = 0$, résulte que nous avons deux critères. L'un en forme

(2.14) $$\left[\tfrac{b}{a} + \tfrac{\mu_4}{b}\right]'_x + a\left[\tfrac{\mu_4}{b}\right]^2 + c + \mu_4 = 0,$$

défini si $\delta \in R$ qui est l'un critère étrangé, et le deuxième en forme

$$\left[\tfrac{\mu_4}{b}\right]'_x - a\left[\tfrac{\mu_4}{b}\right]^2 - c - \mu_4 = 0,$$

défini pour $\delta \in R$, et cité dans le Th.2.1 comme le critère (J). D'ici (I) $\Rightarrow$ (J).

2j) Considérons le critère (J).Son côté gauche a la forme

(2.15) $$J(x) = \left[\tfrac{\mu_4}{b}\right]'_x - a\left[\tfrac{\mu_4}{b}\right]^2 - c - \mu_4.$$

En mettant dans (2.15) la fonction (2.8_4), nous obtenons rapidement d'après (2.15) et la formule (J)- le critère (K) :

$$\mp\left[\sqrt{\mu_5/a}\right]'_x \pm b\sqrt{\mu_5/a} - c - \mu_5 = 0.$$

Cela finit ce fragment de la démonstration.

2k) Pour démontrer que du critère (K) résulte le critère (L), considérons la formule

(2.16) $$K(x) = \mp\left[\sqrt{\mu_5/a}\right]'_x \pm b\sqrt{\mu_5/a} - c - \mu_5,$$

si μ_5 est déterminé par la fonction (2.8_5). Dans ce but calculons la valeur de l'expression

(2.17) $$\omega(x) = \sqrt{\mu_5/a} = \sqrt{a\left\{\left[-b \mp \sqrt{b^2 + 4a(\mu_6 - c)}\right]^2/4a^2\right\}/a} =$$
$$= \sqrt{\left[\left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a(\mu_6 - c)}\right)/2a\right]^2} = |\delta|,$$

où $\delta = \left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a(\mu_6 - c)}\right)/2a$. De là résulte que la formule (2.16) prend les formes

$$K(x) = \mp[\omega(x)]'_x \pm b\omega(x) - c - a\delta^2 = \mp[|\delta|]'_x \pm b|\delta| - c - a\delta^2 \ ;$$

D'ici nous obtenons $K(x)$ en formes développées
(2.18_1) $\quad K(x) = -(\delta)'_x + b\delta - c - a\delta^2 = -\delta'_x + b\delta - c - a\delta^2$, pour $\delta \geq 0$;
(2.18_2) $\quad K(x) = -(-\delta)'_x + b(-\delta) - c - a\delta^2 = \delta'_x - b\delta - c - a\delta^2$, pour $\delta < 0$
(2.18_3) $\quad K(x) = +(\delta)'_x - b\delta - c - a\delta^2 = \delta'_x - b\delta - c - a\delta^2$, pour $\delta \geq 0$;
(2.18_4) $\quad K(x) = +(-\delta)'_x - b(-\delta) - c - a\delta^2 = -\delta'_x + b\delta - c - a\delta^2$, pour $\delta < 0$.

Nous remarquons que les formules finales (2.18_1) et (2.18_4) ainsi que (2.18_2)

et (2.18_3) sont deux à deux identiques. Nous faisons alors les transformations suivantes. De (2.18_1) nous avons

$$K(x) = -\left[\left(-b \mp \sqrt{\Delta_2}\right)/2a\right]'_x + b\left(-b \mp \sqrt{\Delta_2}\right)/2a-$$
$$-(c-a)\left[\left(-b \mp \sqrt{\Delta_2}\right)/2a\right]^2 =$$
$$= -\left[\left(-b \mp \sqrt{\Delta_2}\right)/2a\right]'_x - b^2/2a \mp b\sqrt{\Delta_2}/2a - c - b^2/2a \mp b\sqrt{\Delta_2}/2a-$$
$$-4a^2(\mu_6 - c)/4a^2 = -\left[\left(-b \mp \sqrt{\Delta_2}\right)/2a\right]'_x - b^2/a \mp \sqrt{\Delta_2}/2a - \mu_6,$$

où $\Delta_2 = b^2 + 4a(\mu_6 - c)$. De là et d'après le critère (K), nous obtenons la condition

$$(2.19)\ \left[-b \mp \sqrt{(b^2 + 4a(\mu_6 - c))/2a}\right]'_x + b^2/a \pm b\sqrt{b^2 + 4a(\mu_6 - c)}/2a + \mu_6 = 0.$$

Cette condition est la condition étrangée.

De la formule (2.18_2), on obtient

$$K(x) = -\left[\left(-b \mp \sqrt{\Delta_2}\right)/2a\right]'_x - b\left(-b \mp \sqrt{\Delta_2}\right)/2a-$$
$$-c - a\left[\left(-b \mp \sqrt{\Delta_2}\right)/2a\right]^2 =$$
$$= \left[\left(-b \mp \sqrt{\Delta_2}\right)/2a\right]'_x + b^2/2a \pm b\sqrt{\Delta_2}/2a - c - b^2/2a \mp b\sqrt{\Delta_2}/2a-$$
$$-4a^2(\mu_6 - c)/4a^2 = \left[\left(-b \mp \sqrt{\Delta_2}\right)/2a\right]'_x - \mu_6,$$

où Δ_2 comme ci-dessus et $\delta \in R$. De là et du critère (K) résulte le critère (L);

$$\left[b \mp \sqrt{(b^2 + 4a(\mu_6 - c))}/2a\right]'_x + \mu_6 = 0,$$

pour $\delta \in R$, donc (K) $\Rightarrow$ (L). Cela finit ce fragment de démonstration.

2l) Comme la dernière pour démonstration, nous avons l'implication (L) $\Rightarrow$ (G). Au commencement calculons la valeur de l'expression $\sqrt{\Delta_2}$ en profitant de la fonction (2.8_6). Nous avons

$$(2.20)\ \omega(x) = \sqrt{\Delta_2} = \sqrt{b^2 + 4a(\mu_6 - c)} =$$
$$= \sqrt{b^2 + 4a\left[\left(a(\mu_1 - c)^2/b^2 + \mu_1 - c\right)\right]} =$$
$$= \sqrt{b^2 + 4a(\mu_1 - c) + (2a(\mu_1 - c)/b)^2} = \sqrt{(b + 2a(\mu_1 - c)/b)^2} =$$
$$= |b + 2a(\mu_1 - c)/b| = |\delta|,$$

où $\delta = b + 2a(\mu_1 - c)/b$. Le côté gauche du critère (L) a la forme

$$(2.21)\ L(x) = \left[\left(b \pm \sqrt{b^2 + 4a(\mu_6 - c)}\right)/2a\right]'_x + \mu_6 =$$
$$= [(b \pm \omega(x))/2a]'_x + \mu_6 =$$
$$= [(b \pm |\delta|)/2a]'_x + a(\mu_1 - c)^2/b^2 + \mu_1,$$

où δ comme ci-dessus. Nous avons ici les quatre cas suivants:

(2.21_1) $L(x) = [(b + \delta)/2a]'_x + \mu_6 = (b/a + (\mu_1 - c)/b)'_x + \mu_6$, pour $\delta \geq 0$;
(2.21_2) $L(x) = [(b + (-\delta))/2a]'_x + \mu_6 = -[(\mu_1 - c)/b]'_x + \mu_6$, pour $\delta < 0$;
(2.21_3) $L(x) = [(b - \delta)/2a]'_x + \mu_6 = -[(\mu_1 - c)/b]'_x + \mu_6$, pour $\delta \geq 0$;
(2.21_4) $L(x) = [(b - (-\delta))/2a]'_x + \mu_6 = (b/a + (\mu_1 - c)/b)'_x + \mu_6$, pour

$\delta < 0$.
Analogiquement que pour les cas antérieurs, nous remarquons que les fragments finals des formules (2.21_1) et (2.21_4) et aussi (2.21_2) et (2.21_3) sont identiques. Il suffit donc considérer séparément deux d'eux. Dans le cas (2.21_1), d'après le critère (L) et μ_6 en forme (2.8_6), nous avons la condition

$$[b/a + (\mu_1 - c)/b]'_x + a[(\mu_1 - c)/b]^2 + \mu_1 = 0 \ , \tag{2.22}$$

pour $\delta \in R$. Cette condition est une condition étrangée. Mais dans le cas (2.21_2), nous avons précisément le critère (G):

$$[(\mu_1 - c)/b]'_x - a[(\mu_1 - c)/b]^2 - \mu_1 = 0$$

si $\delta \in R$. Nous avons alors que (L) $\Rightarrow$ (G). Le cycle de démonstrations est fermé.

Nous remarquons que dans cette démonstration nous avons cherché quelques critères qui sont étrangés. Ce sont les conditions (2.11), (2.14), (2.19), (2.22). Elles étaient obtenues par les formules (2.8_2), (2.8_3), (2.8_5), (2.8_6), qui sont les résolutions des équations (2.7) par la méthode qui élargit l'ensemble des solutions d'équations primaires. Aucune des solutions (2.7_2), (2.7_3), (2.7_5), (2.7_6) satisfaisant l'équation (0.1) avec les conditions H, I, K, L n'accomplit cette équation avec les conditions (1.11), (1.14), (1.19) et (1.22). Cela permet rejeter ces conditions et par le même cette démonstration est finie.

<u>Le cas $b \equiv 0$ de l'équation (0.1).</u>

Dans ce cas l'équation différentielle (0.1) prend la forme

$$y' = a(x)y^2 + c(x) \tag{0.1*}$$

où $a, c \in C_X$. Remarquons que la méthode de l'integrale particulière peut être appliquer ici dans deux cas:

I) Nous avons

$$(2.23_1) \qquad y' - c = ay^2 \qquad \text{et} \qquad (2.23_2) \qquad y' = ay^2 + c$$

En introduissant dans l'équation (2.23_1) l'inscription symbolique, nous obtenons

$$y' - c = \alpha_1 \text{ et } ay^2 = \alpha_1.$$

De là résultent les solutions

$$(2.24_1) \qquad y = \textstyle\int (\alpha_1 + c)\, dx \qquad \text{et} \qquad (2.24_2) \qquad y = \mp\sqrt{\alpha_1/a}$$

En égalant ces deux solutions, nous obtenons la condition

$$\int (\alpha_1 + c) dx = \mp\sqrt{\alpha_1/a}$$

De là nous obtenons les deux coefficients

$$(2.25_1) \quad a = \alpha_1/\left(\textstyle\int (\alpha_1 + c)\, dx\right)^2 \qquad \text{et} \qquad (2.25_2) \quad c = -\alpha_1 \mp \left(\sqrt{\alpha_1/a}\right)'_x$$

En profitant de ces deux résultats, nous obtenons deux équations différentielles en formes

(2.26_1) $y' = \alpha_1 / \left(\int (\alpha_1 + c)\, dx\right)^2 y^2 + c$ et (2.26_2) $y' = ay^2 - \alpha_1 \mp \left(\sqrt{\alpha_1 / a}\right)'_x$.
Leurs solutions particulières sont respectivement les fonctions (2.24_1) et (2.24_2).

II) En introduisant pour l'équation (0.1*) l'inscription

$$y' = \alpha_2 \qquad \text{et} \qquad ay^2 + c = \alpha_2$$

nous obtenons

(2.27_1) $\quad y = \int \alpha_2 dx \qquad$ et $\qquad (2.27_2) \qquad y = \mp\sqrt{(\alpha_2 - c)/a}$

En égalant ces deux résultats et les résoudrant à l'égard a et c, nous obtenons les expressions

(2.28_1) $\quad a = (\alpha_2 - c) / \left(\int \alpha_2 dx\right)^2 \qquad$ et $\quad (2.28_2) \qquad c = \alpha_2 - a\left(\int \alpha_2 dx\right)^2$.

De là résultent les équations différentielles

(2.29_1) $\qquad y' = \left[(\alpha_2 - c) / \left(\int \alpha_2 dx\right)^2\right] y^2 + c$ et

(2.29_2) $\qquad y' = ay^2 + \alpha_2 - a\left(\int \alpha_2 dx\right)^2$

Leur solution particulière est la fonction

$$y = \int \alpha_2 dx$$

En se fondant sur les résultats obtenus, les solutions générales peut etre obtenues aussi. Come le corollaire de ce raisonnement, nous avons le théorème:

Théorème 2.2. Si l' Hypothèse B est satisfait, alors les équations diférentielles (2.26_1), (2.26_2), (2.29_1) et (2.29_2) de Riccati (0.1*) sont effectivement intégrables. Dans les cas cités, leurs solutions particulières sont déterminées respectivement par les expressions (2.24_1), (2.24_2) et pour (2.29_1) et (2.29_2) par (2.30).

III) Le problème de résoudre effectivement des critères (A) - (F) par rapport à μ_k où k= 1,. . . ,6.

Du théorème : Th. 2.1 du chapitre II de ce travail résulte, que tous critères intégraux (A) - (F), on peut traduire aux critères différentiels. De cela résulte qu'il suffit considérer les critères (G) - (L). Nous avons démontré aussi leur équivalence. En présent nous les désignions de nouveau par:

(3.1) $\qquad [(\mu_1 - c)/b]'_x - a\,[(\mu_1 - c)/b]^2 - \mu_1 = 0$,

(3.2) $\qquad \mp\left[\sqrt{(\mu_2 - c)/a}\right]'_x \pm b\sqrt{(\mu_2 - c)/a} - \mu_2 = 0$

(3.3) $\qquad \left\{\left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3}\right)/2a\right\}'_x - c - \mu_3 = 0$,

(3.4) $\qquad [\mu_4 / b]'_x - a(\mu_4 / b)^2 - c - \mu_4 = 0$,

(3.5) $\qquad \mp\left[\sqrt{\mu_5 / a}\right]'_x \pm b\sqrt{\mu_5 / a} - c - \mu_5 = 0$,

(3.6) $\qquad \left\{\left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a(\mu_6 - c)}\right)/2a\right\}'_x - \mu_6 = 0$,

Remarquons, que dans les critères (3.1) - (3.6), d'après le fait que les fonctions a, b, c sont données par l'équation (0.1), alors la fonction μ_k, pour

$k = 1, \ldots, 6$ est une fonction inconnue. Elle figure aussi successivement dans les solutions particulières (v. [11] p.89). Il a lieu le théorème suivant:

Théorème 3.1. Si les conditions suivantes sont satisfaites:

$a, b, c, \mu_k \in C^1_X, (k = 1, \ldots, 6), abc \neq 0, \mu_1 - c \neq 0, \quad (\mu_2 - c)/a > 0 \ , b^2 + 4a\mu_3 > 0, \quad \mu_4/b \neq 0, \quad \mu_5/a > 0, \quad b^2 + 4a(c - \mu_6) > 0$, alors les conditions (3.1)-(3.6), on peut traduire à l'équation de Riccati en forme

$$v' = a(x)v^2 + b(x)v + c(x) \ , \tag{3.7}$$

où $abc \neq 0$.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème nous introduisons la série des substitutions

(3.8) $v = (\mu_1 - c)/b$, (3.9) $v = \mp\sqrt{(\mu_2 - c)/a}$,

(3.10) $v = \left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3}\right)/2a$, (3.11) $v = \mu_4/b$,

(3.12) $v = \mp\sqrt{\mu_5/a}$,

(3.13) $v = \left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a(c - \mu_6)}\right)/2a$.

De la série (3.8)-(3.13) nous déterminons les fonctions μ_k. Nous avons donc la série:

(3.14) $\mu_1 = bv + c$, (3.15) $\mu_2 = av^2 + c$,

(3.16) $\mu_3 = av^2 + bv$, (3.17) $\mu_4 = bv$,

(3.18) $\mu_5 = av^2$, (3.19) $\mu_6 = av^2 + bv + c$.

En substituant successivement les couples: (3.8), (3.14); (3,9), (3.15); (3.10), (3.16); (3.11), (3,17); (3.12), (3.18); (3.13), (3.19) dans les expressions (3.1) - (3.6), nous obtenons chaque fois l'équation (3.7) avec les coefficients: $a(x), b(x), c(x)$.

Considérons l'un de ces cas. Soit être l'exemple 4. Nous avons le cas suivant:

(3.11) $v = \mu_4/b$; (3.17) $\mu_4 = bv$; (3.4) $(\mu_4/b)'_x - a(\mu_4/b)^2 - c - \mu_4 = 0$;

En mettant (3.11) et (3.17) dans (3.4), nous obtenons l'équation

$$v' - a(x)v^2 - b(x)v - c(x) = 0$$

De là résulte l'équation (3.7). Analoguques procédures aux équations citées conduitent aussi à l'équation (3.7). Remarquons encore que les fonctions μ_k définies par la fonction v dépendent de trois coefficients a, b, c de l'équation (0.1). Il a lieu le théorème:

Théorème 3.2. Si les fonctions a, b, c et les constantes r et q satisfaitent les hypothèses:

$a \in C^2_X, \quad b, c, \mu_k \in C^1_X, \quad (k = 1, ..., 6), \quad abc \neq 0, \quad \mu_1 - c \neq 0,$
$(\mu_2 - c)/a > 0, \quad b^2 + 4a\mu_3 > 0, \quad \mu_4 \neq 0, \quad \mu_5/a > 0, \quad b^2 - 4a(c - \mu_6) > 0,$

$r \in R, \quad q \in R\backslash(0), \quad x > 0$, et la fonction $c(x)$ est déterminée par la relation

$$c(x) \equiv (1/a)\left(qx^r + {}^1\!/_4(b + a'/a)^2 - {}^1\!/_2\,(b + a'/a)'_x\right), \tag{3.20}$$

on peut la transformer par la substitution

(3.21) $v = (1/a)\left(Y - {}^{1}\!/_{2}u\right)$

où

(3.22) $u = b + a'/a,$

en l'équation spéciale de Riccati en forme

(3.23) $Y' = Y^2 + qx^r.$

Démonstration. En mettant la substitution (3.21) et (3.20) dans l'équation (3.7) avec les coefficients a, b, c, on obtient l'identité

$$\left(-a'/a^2\right)\left(Y - {}^{1}\!/_{2}u\right) + (1/a)\left(Y' - {}^{1}\!/_{2}u'\right) = a\left(1/a^2\right)\left(Y - {}^{1}\!/_{2}u\right)^2 + \\ +b\,(1/a)\left(Y - {}^{1}\!/_{2}u\right) + (1/a)\left(qx^r + {}^{1}\!/_{4}u^2 - {}^{1}\!/_{2}u'\right)$$

de là nous obtenons

$$(-a'/a)\left(Y - {}^{1}\!/_{2}u\right) + Y' - {}^{1}\!/_{2}u' = \\ = \left(Y - {}^{1}\!/_{2}u\right)^2 + b\left(Y - {}^{1}\!/_{2}u\right) + qx^r + {}^{1}\!/_{4}u^2 - {}^{1}\!/_{2}u'$$

d'où - en faisant la réduction et la groupage des expressions analogues, nous avons

$$Y' = Y^2 - Yu + {}^{1}\!/_{4}u^2 + (b + a'/a)\left(Y - {}^{1}\!/_{2}u\right) + qx^r + {}^{1}\!/_{4}u^2$$

d'où, d'après la détermination de u, on obtient l'équation (3.23).

Remarquons que l'équation (3.23) d'après le théorème de J. Liouville (v.[11] p. 92, [5] p. 43-44, [17]p. 135-136 et aussi [13,15,16]) dévise l'équation spéciale de Riccati sur deux classes l'une quelle est effectivement intégrable si $r = -2, r = 4k/(1-2k)$, si k - le nombre entier et d'autre qu'on ne peut pas résoudre effectivement pour $q \neq 0, r \in R$ et $r \neq -2, r \neq 4k/(l-2k)$, si k - le nombre entier.

De cela résulte que chaque équation (3.7) de Riccati correspondant à l'équation (3.23) dans laquelle les fonctions inconnues sont les fonctions $\mu_k (k = 1, \ldots, 6)$ possède la classe qu'on peut résoudre effectivement et telle qui ne peut pas résoudre effectivement.

Corollaire 3.1. L'équation de Riccati (3.7) dans laquelle coefficient $c(x)$ a la forme

$$c(x) = (1/a(x))\left(qx^r + {}^{1}\!/_{4}(b(x) + a'(x)/a(x))^2 - {}^{1}\!/_{2}\left(b(x) + a'(x)/a(x)\right)'_x\right)$$

c. à d. l'équation

(3.24.) $y' = a(x)y^2 + b(x)y + (1/a(x))\left(qx^r + {}^{1}\!/_{4}u^2 - {}^{1}\!/_{2}u'\right)$

où $u = b + a'/a$, possède deux classes l'une qu'on peut toujours résoudre effectivement et la seconde pour laquelle cela est impossible.

Parce que cette procédure peut être répété pour chaque fonction $\mu_k (k = 1, \ldots, 6)$, alors on ne peut pas obtenir la solution particulière de l'équation de Riccati dans chaque cas si $q \neq 0, r \neq -2, r \neq 4k/(1-2k)$, où k - nombre entier sans zéro considéré à l'aide de l'intégrabilité effective.

3. Remarques finales

Dans ce travail nous avons montré que les constatations suivantes sont vraies:

1) Pour chaque équation de Riccati pour laquelle sa solution particulière est connue, on peut obtenir l'équation pour laquelle sa généralisation est effectivement intégrable (v. p. ex.: Exemple 1.1).

2) Pour chaque arbitraire l'équation de Riccati, on ne peut pas chercher sur la route effective sa solution particulière (v. Th. 3.2 et Corol. 3.1).

3) Les résultats donnés dans les monographies ([4], [5] et [15]) on peut embrasser par les nouveaux équations et élargir par nouvelles généralisations (v. [6], [7], et [10], [11]).

4) La méthode de solution particulière (MSP), présentée la première fois dans le travail: Complément aux traités de Kamke et de Murphy. III. Publ. Inst. Math. Beograd. Nouv. série, T. 22 (36) 1977 pp, 119-126, peut être appliquée aux équations linéaires du n-ième ordre, que permet obtenir les nouveaux résultats dans le domaine de l'intégrabilité effective (v. p.ex. [10]).

References

[1] L.M.Berković, N. Ch. Rozov, A, M. Èjšinsij, *O samosoprjažennych i privodimych linejnych differencialnych uravnenijach vysšich porjadkov i o nekotorych uravnenijach vtorogo porjadka, integriruemych w konečnom vide*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehh. Fak. Ser. Mat. Fiz. No 230- No 241 (1968), p. 61-87.

[2] I.A.Dobodejč, *Ob integrirovanii uravnenija Rikkati i otyskanii častngo rešenija nekotorych uravaenij*, Diff. Urav. XIII (1977) 8, p. 61 - 87.

[3] E.Kamke, *Différentialgleiehungen I*, Gew ohnliche Différentialgleiehungen, 4 Auflage, Leipzig 1962.

[4] E. Kamke, *Différentialgleiehungen Lösungsmethoden und Lösungen I*, Gewhnliche Différentialgleiehungen, 6 verbesserte Auflage, Leipzig 1959.

[5] E. Kamke, *Spravočnik po obyknovennym diffrencialnym uravnenijam*, izdanie vtoroe, Moskva 1961 (traduction de l'allemand).

[6] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy, III. Quelques cri-tères suffisants de l'intégrabilité effective de l'équation de Riccati avec deux coefficients arbitraires*, Publ. Inst. Math, (Beograd), (NS) 22 (36) (1977) p. 119-126.

[7] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy, V. Quelques classes de l'équation de Riccati effectivement intégrables avec deux coefficients ar-bitraires et le troisième dépendant de ces deux et d'une fonction arbitraire*, Publ. Inst. Math. (Beograd), (NS) 26 (40) (1979), p. 113-129.

[8] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy VII. Une méthode de l'obtention des classes de l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre effectivement intégrables*, Publ. Inst. Math. (Beograd), (NS) 35 (49) (1984), p. 68-74.

[9] A. Kapcia, *On the problem of effective inegrability of Riccati differential equation and of a linear differential equation of second order with the aid of particular integral,*

Differential Equations and Applications I, Proc. Second Conf. 1981, Rousse 1982, p. 324-328.

[10] A. Kapcia, *Sur la méthode de l'intégrale particulière et sur ses conséquences pour l'équation de Riccati et pour les équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre supérieur*, Ann. Soc. Math. Pol., Comm. Math. XLVII (2), (2007), p. 255-283.

[11] A.Kapcia, *Sur les conséquences d'un théorème de J. Liouville en matière de possibilité et de l'impossibilité de trouver effectivement des solutions particulières d'équation de Riccati et linéaire du second ordre*, Publ. Inst. Math. (Beograd), (NS)-83 (97) (2008), p. 87-97.

[12] J.Liouville, *Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati*, Journal de Math. pures et appliquées 6 (1841), p. 1-13.

[13] N.M.Matwiejew, *Metody całkowania równań rozniczkowych zwyczajnych*, PWN, Wraszava 1970 (traduction du russe).

[14] R.R.Mkrtumjan, *Ob odnom slučae integriruemosti linejnogo uravnenija wtorogo porjadka*, Diff. Urav. (1979), No 3, p. 555-559.

[15] G.M.Murphy, *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, Princeton, New Jersey, New York 1960.

[16] J.Muszynski, A.D.Myszkis, *Rowania różniczkowe zwyczajne, wydanie 1*, PWN Warszawa 1984.

[17] W.Nikliborc, *Rownania różniczkowe, Czese I*, PTM Waszawa-Wrocław 1951.

ЗА ПРОБЛЕМИТЕ ОКОЛУ МОЖНОСТА И НЕМОЖНОСТА ЗА ЕФЕКТИВНО ДОБИВАЊЕ НА ПАРТИКУЛАРНИ РЕШЕНИЈА НА РАВЕНКАТА НА РИКАТИ

Андржеј Капчиа

Р е з и м е

Користејќи го методот на партикуларен интеграл за равенката на Рикати симболички претставен во [10] и претходно применет во трудот [7] разгледана и дискутирана е можноста за добивање на нови обопштувања за ефективно интегрирање на равенката (0.1). За ова се користат резултатите добиени во [7] и равенката на Ојлер од втор степен, затоа што помеѓу овие равенки постои кореспонденција. Покажано е дека постојат 90 класи равенки кои се поопшти од равенката на Рикати кои одговараат на равенката на Ојлер од втор ред и сите овие равенки се ефективно интеграбилни. Во вториот дел се испитуваат својствата на еквиваленција на диференцијабилните критериуми воведени преку методот на партикуларен интеграл во [7] и цитирајќи ги и докажувајќи ги теоремите 2.1 и 2.2 кои ги определуваат нивните реципрочни релации. Во третиот дел од трудот се конструирани примери на равенка на Рикати која може ефективно да се интегрира и равенка за која тоа не е можно. За ова, се користи теоремата на Лиувил за специјалната равенка на Рикати (T.3.2). Постојат континуум диференцијални услови кои се цитирани во оваа забелешка кои може да се трансформираат во специјална равенка на Рикати за која теоремата на Лиувил е задолжителна.

Institut Mathématique et Informatique, L'Ecole Polytechnique, 42-201 Czestochowa, Pologne