Математички Билтен
Книга 9-10 (XXXV-XXXVI)
1985-1986 (33-38)
Скопје, Југославија

ЗА ЕДЕН НЕОРДИНАРЕН ВЛЕЗЕН ПОТОК

М. Георгиева

Во овој труд се разгледува еден квазипоасонов поток. Клиентите пристигнуваат во моменти кои образуваат поасонов поток со параметар λ, а во секој таков момент може да пристигне група од клиенти, чиј број е случајна променлива X, со распределба на веројатности определена со генерирачка функција $\phi(z)$. Се наоѓа распределбата на број на клиенти кои пристигнуваат за интервал на време со должина t, и нејзините моменти. Во специјалниот случај, кога X има геометриска распределба, возможно е точно наоѓање на распределбата. Низа реални потоци се неординарни, најчесто квазипоасонови, заради што нивното изучување е од посебен интерес.

Прв чекор во изучувањето на секој систем за масовно опслужување е испитување на влезниот поток од побарувања (клиенти). Да разгледаме поток кај кој моментите на пристигнување на клиентите образуваат прост (поасонов) поток со параметар λ, а бројот на клиенти кои пристигнуваат во секој таков момент е случајна променлива X со распределба на веројатностите:

$$f_n = P\{X=n\}, \quad n=1,2,\dots .$$

Генерирачката функција на веројатностите ќе ја означиме со $\phi(z)$ и

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X=n\}\cdot z^n.$$

Притоа, почетните моменти од прв и втор ред ги означуваме со ϕ_1 и ϕ_2 и за нив важи:

$$\phi_1 = \phi'(1), \quad \phi_2 = \phi''(1) + \phi'(1).$$

Ако со Y_t ја означиме случајната променлива: број на клиенти кои пристигнуваат за интервал на време со должина t, тогаш $P\{Y_t=k\}=P_k(t)$ е веројатноста да пристигнат точно k клиенти. Соодветната генерирачка функција е определена со:

$$P(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) z^k,$$

а првите два почетни моменти ќе бидат:

$$EY_t = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot P_k(t) = P'(1,t)$$

$$EY_t^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P_k(t) = P''(1,t) + P'(1,t).$$

Генерирачката функција на распределбата на веројатноста за поасонов поток со параметар λ гласи:

$$P(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} z^k = e^{-\lambda(1-z)t}.$$

Генерирачката функција на распределбата на Y_t може да се добие со воведување на дополнителни настани. Имено, ако сметаме дека секој клиент може да биде „црвен" со веројатност z или „син" со веројатност 1-z, $0<z<1$, независно од другите, тогаш со $\phi(z)$ е дадена веројатноста сите клиенти во група да бидат „црвени". На тој начин $P_n(t)z^n$ е веројатноста за време t да пристигнат n клиенти и сите да се „црвени", додека $P(z,t)$ е веројатноста за време t да пристигнат само „црвени" клиенти. За интервал на време со должина t можат да се јават k клиенти од поасоновиот поток со веројатности $\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, $k=0,1,2,\dots$, и притоа во секој момент пристигнува група од „црвени" клиенти со веројатност $\phi(z)$ за секоја група. Затоа изразот

$$\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} [\phi(z)]^k$$

ја претставува веројатноста во к моменти за време t од поасонов поток да пристигнат групи од „црвени" клиенти, така што

$$P(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} [\phi(z)]^k,$$

што може да се запише и на следниот начин:

$$P(z,t) = \exp\{-\lambda[1-\phi(z)]t\}, \qquad |z| \le 1$$

За првите два почетни моменти добиваме:

$$EY_t = P'(1,t) = \lambda\phi'(1)t = \lambda\phi_1 t,$$

$$EY_t^2 = P''(1,t) + P'(1,t) = \lambda^2 t^2 [\phi'(1)]^2 + \lambda t[\phi''(1) + \phi'(1)],$$

$$EY_t^2 = \lambda^2\phi_1^2 t^2 + \lambda\phi_2 t,$$

од каде што, за дисперзијата се добива

$$DY_t = \lambda\phi_2 t$$

Ако извршиме споредување со прост поасонов поток, заклучуваме дека средниот број на клиенти, коишто пристигнуваат за интервал на време t, е пропорционален со должината на интервалот, со коефициент на пропорционалност $\lambda\phi_1$, што значи дека интензитетот на овој поток е $\lambda\phi_1$. Дисперзијата на бројот на пристигнати клиенти е исто така пропорционален со должината на интервалот на време, но со коефициент на пропорционалност $\lambda\phi_2$.

Веројатностите $P_k(t)$, т.е. распределбата на веројатностите на Y_t може да се добие, во принцип, со развивање на функцијата $P(z,t)$ по степените на z.

Веројатноста $P\{Y_t=0\}=P_t(0)$ е еднаква на веројатноста да нема ни еден момент од поасоновиот поток со параметар λ, т.е. да не пристигне ни една група. Затоа:

$$P_o(t) = \exp\{-\lambda[1-\phi(o)]t\} = e^{-\lambda t}$$

Во општ случај за изводите од повисок ред се добиваат сложени изрази во кои тешко може да се уочи законитост.

Во специјалниот случај кога случајната променлива X - број на клиенти во група има геометриска распределба, задачата за наоѓање на распределбата на Y_t се решава до крај. Имено, тогаш:

$$f_k = P\{x=k\} = pq^{k-1}, \quad k=1,2,...$$

и

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}z^k = \frac{pz}{1-pz}.$$

Првите два момента и дисперзијата се:

$$\phi_1 = \phi'(1) = \frac{1}{p}$$

$$\phi_2 = \phi'(1) + \phi''(1) = \frac{1+q}{p^2}$$

и $DX = \frac{q}{p^2}$ соодветно.

Во тој случај генерирачката функција на распределбата на Y_t го добива обликот:

$$P(z,t) = \exp\{-\lambda \frac{1-z}{1-qz} t\}.$$

Средниот број на клиенти кои пристигнуваат за време t е

$$EY_t = \frac{\lambda}{p} t,$$

а дисперзијата:

$$DY_t = \lambda \frac{1+q}{p^2} t.$$

Интензитетот на потокот е $\frac{\lambda}{p}$.

За веројатностите $P\{Y_t=\kappa\}=P_\kappa(t)$, $\kappa=0,1,2,\ldots$ се добива:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t},$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t}\cdot p,$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2!} e^{-\lambda t}\cdot p^2 + \frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t}\cdot p\cdot q,$$

$$P_3(t) = \left[\frac{(\lambda t)^3}{3!} p^3 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} 2p^2 q + \frac{\lambda t}{1!} pq^2\right] e^{-\lambda t},$$

$$P_4(t) = \left[\frac{(\lambda t)^4}{4!} p^4 + \frac{(\lambda t)^3}{3!} 3p^3 q + \frac{(\lambda t)^2}{2!} 3p^2 q^2 + \frac{\lambda t}{1!} pq^3\right] e^{-\lambda t}$$

итн.

Со наоѓање на првите шест изводи на $P(z,t)$ за $z=0$, за веројатностите $P_\kappa(t)$ се забележува следнава законитост:

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}, \quad n=1,2,\ldots$$

Точноста на формулата за секое n ја проверуваме на следниов начин. Настанот: пристигнаа n клиенти од квазипоасоновиот поток за време t, ќе се појави ако во к-те моменти, $\kappa=1,2,\ldots,n$, за време t од поасоновиот прост поток пристигнат к-групи со по n_i, $(i=1,\ldots,\kappa)$ клиенти така што $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Веројатноста за време t да има к моменти од поасоновиот поток е $\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, $\kappa=1,2,\ldots,n$, при што сите клиенти можат да стигнат во најмалку една група (кога $\kappa=1$, $n_i=n$), а најмногу во n групи (кога $n_i=1$, $i=1,2,\ldots,n$). Бидејќи во секоја група има барем еден клиент, веројатноста i-тата по ред група да има n_i клиенти ќе биде

$$pq^{n_i-1}, \quad i=1,\ldots,k$$

така што веројатноста да дојдат n-клиенти во к групи со n_i клиенти $i=1,\ldots,\kappa$, соодветно, е определена со:

$$\prod_{i=1}^{k} pq^{n_i-1} = p^k q^{n-k}.$$

За да се добие веројатноста на пристигнување на n клиенти во к групи, независно од конкретниот распоред по групи, $p^\kappa q^{n-\kappa}$ треба да се помножи со бројот на сите возможни распоредувања на n-клиенти во к групи, при што се запазува редоследот на пристигнувањето. Ако секој клиент го означиме со редниот број на неговото пристигнување, тогаш клиентот 1 е сигурно во првата група. Останува да се распоредат n-1 клиенти во к групи. Бројноста n_i на секоја група ќе се најде ако се знае првопристигнатиот во секоја група. Нека $j_1, j_2, \ldots, j_k$ се нивните редни броеви, тогаш важи:

$$1 = j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n, \quad j_{i+1} - j_i = n_i$$

$$i=1,\ldots,k-1, \quad n_k = n - j_k + 1.$$

Според тоа, $j_2\ j_3 \ldots j_k$ е варијација без повторување од класа к-1, од n-1 елементи, каде што

$$j_2 < j_3 < \ldots < j_k. \qquad (*)$$

Значи од сите варијации без повторување составени од елементите $j_2, j_3, \ldots, j_k$ од интерес е само една (а ги има (к-1)!). Затоа бројот на сите варијации без повторување од класа к-1 од n-1 елементи за кои важи (*) изнесува

$$\frac{V_{n-1}^{k-1}}{(k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Така веројатноста n клиенти да пристигнат во к групи е определена со изразот:

$$\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \cdot \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

Бидејќи за време t можат да се јават 1,2,...,n моменти од поасоновиот поток во кои можат да бидат распоредени n-те пријави, се добива дека

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}, \quad n=1,2,\ldots .$$

Со тоа е покажана точноста на добиената формула за законот на распределба на веројатностите на разгледуваниот поасонов поток.

Со овој труд се комплетира изучувањето на системите за масовно опслужување од типот $M^X/G/1$, на кои им се посветени и трудовите [2], [3], [4], [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] А.Обретенов, Б.Димитров, Е.Даниелян, Масовно обслужване и приоритетни системи на обслужване, София, Наука и изкуство, 1973

[2] М.Георгиева, Некои проблеми на теоријата на системите за масовно опслужување од типот M/G/1, маг. работа, Матем. факултет, 1977

[3] М.Георгиева, Карактеристики на една система за масовно опслужување при групно пристигнување на пријавите, Год. збор. Матем. фак. 28, 95-97, 1977

[4] М.Георгиева, Распределба на некои карактеристики на системите за масовно опслужување од типот M/G/1 и $M^x/G/1$, SYMOPIS '83

[5] М.Георгиева, Распределба на некои карактеристики на системите за масовно опслужување од типот M/G/1 и $M^x/G/1$, Год. збор. Матем. фак., 33-34, 69-76, 1982-1983

[6] Г.Деч, Руководство по практическому применено преобразования Лапласа и z-преобразования, Москва, 1971

Magdalena Georgieva

ON A NONORDINAL ENTRANCE FLOW

S u m m a r y

We consider a quasipoisson flow. The customers are arriving in groups, forming a poisson flow with parameter λ. We find the distibution of the number of customers arriving in interval time t, and the moments. In the special case when the random variable - the number of customers - has geometric distribution, we obtain this distibution in explicite form.