ЗА ЕДНА ПОТКЛАСА ОБОПШТЕНИ АНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ ОД ТРЕТА КЛАСА СО КАРАКТЕРИСТИКА $\mu=\lambda z^2$

Борко Илиевски

Апстракт. Обопштените аналитички функции (4) од трета класа со карактеристика $\mu=\lambda z^2 \quad (\lambda\in\mathbb{C})$, дефинирани со ареоралната равенка (3), се запишани во поконцизни форми (6) и (17).

Вовед

Во монографијата на Г. Н. Положий [1] стр. 41-58 се дефинирани четири класи на обопштени аналитички функции. Една од тие класи е класата на обопштени аналитички функции од трета класа или обопштени аналитички функции со карактеристика $\mu=r+is$, како решенија $w=w(z)$ на ареоларната равенка

$$\frac{\hat{d}w}{d\overline{z}}=\mu\overline{w} \tag{1}$$

Притоа

$$\frac{\hat{d}w}{d\overline{z}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \tag{2}$$

е т.н. операторен извод по $\overline{z}=x-iy$ или ареоларен извод на комплексната функција $w=w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ од комплексната променлива $z=x+iy$. Операциските правила на ареоларниот извод $\frac{\hat{d}}{d\overline{z}}$ се дадени во споменатата монографија [1] стр. 17-41.

Во трудот [2], со метод на ареолошки редови $w=\sum_{p,q=0}^{\infty}c_{p,q}z^p\overline{z}^q$ добиено е дека ареоларната равенка

$$\frac{\hat{d}w}{d\overline{z}}=\lambda z^2\overline{w}\ (\lambda\in\mathbb{C}) \tag{3}$$

има решение

$$w=\phi(z)+\lambda z^2\int\overline{\phi}(z)d\overline{z}+z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}}{3^n n!}\Bigg[\overline{z}^{3n}\underbrace{\int z^2dz\int z^2dz\ldots\int z^2dz\int\phi(z)dz}_{n-\text{интеграли}}+ \\ +\lambda z^{3n}\underbrace{\int\overline{z}^2d\overline{z}\int\overline{z}^2d\overline{z}\ldots\int\overline{z}^2d\overline{z}\int\overline{\phi}(z)d\overline{z}}_{n+1-\text{интеграли}}\Bigg] \tag{4}$$

Притоа $\phi=\phi(z)$ е произволна аналитичка функција во улога на интеграциона константа.

Во оваа работа го поставуваме следниот проблем: Дали може решението (4) на ареоларната равенка (3) да се запише во поконцизна форма?

За таа цел ја користиме формулата

$$\underbrace{\int z^2dz\int z^2dz\ldots\int z^2dz\int\phi(z)dz}_{n-\text{интеграли}}=\begin{cases}\int\frac{(z-\zeta)^{3(n-1)}}{3^{n-1}(n-1)!}\phi(\zeta)d\zeta, & n\geq 2\\ \int\phi(\zeta)d\zeta & , \ n=1\end{cases} \tag{5}$$

во чија веродостојност, со последователно диференцирање, лесно се уверуваме.

Формулата (5) е еден вид генерализација на познатата Cauchy-ева формула според која n-то струка интеграција може да се замени со еднострука интеграција со параметар, а којашто формула се наоѓа во скоро секој курс по обичните диференцијални равенки.

Согласно (5) решението (4) на ареоларната равенка (3) се запишува во облик

$$w=\phi(z)+\lambda z^2\int\overline{\phi}(z)d\overline{z}+ \\ +z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}}{3^n n!}\left[\int\frac{(z-\zeta)^{3(n-1)}}{3^{n-1}(n-1)!}\phi(\zeta)d\zeta+\lambda z^{3n}\int\frac{(\overline{z}-\overline{\zeta})^{2n}}{3^n n!}\overline{\phi}(\zeta)d\overline{\zeta}\right]$$

или, по извесно средување, во облик

$$w=\phi(z)+\lambda z^2\int\overline{\phi}(z)d\overline{z}+ \\ +z^2\left[\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\overline{z}^{3n}(z-\zeta)^{3(n-1)}}{3^n n!3^{n-1}(n-1)!}\phi(\zeta)d\zeta+\lambda\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}(\overline{z}-\overline{\zeta})^{3n}z^{3n}}{(3^n n!)^2}\overline{\phi}(\zeta)d\overline{\zeta}\right] \tag{6}$$

Со S да ја означиме сумата на вториот ред во (6). Имаме

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\left(\overline{z}-\overline{\zeta}\right)^{3n}z^{3n}}{(3^n n!)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[|\lambda|^{\frac{2}{3}}z\left(\overline{z}-\overline{\zeta}\right)\right]^{3n}}{(3^n n!)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{3n}}{(3^n n!)^2}, \tag{7}$$

каде

$$u=|\lambda|^{\frac{2}{3}}z\left(\overline{z}-\overline{\zeta}\right). \tag{8}$$

Понатаму $\frac{dS}{du}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3nu^{3n-1}}{(3^n n!)^2}$ и $\frac{d}{du}\left(u\frac{dS}{du}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{3(n-1)}u^2}{[3^{n-1}(n-1)!]^2}=u^2(1+S(u))$.

Оттука добиваме дека сумата S, дефинирана со (7), е решение на нехомогената линеарна диференцијална равенка

$$\frac{d^2S}{du^2}+\frac{dS}{du}-u^2S=u^2 \tag{9}$$

Со смена

$$1+S=T \tag{10}$$

каде $T=T(u)$ е нова непозната функција, равенката (9) се трансформира во хомогена диференцијална равенка

$$u\frac{d^2T}{du^2}+\frac{dT}{du}-u^2T=0 \tag{11}$$

Во Камке [3] стр. 401, равенка 1а, го наоѓаме следниот резултат: Равенката

$$x^2y''+axy'+(bx^m+c)y=0, \qquad m\neq 0 \tag{12}$$

има решение

$$y=\mathcal{Z}_0\left(\frac{2}{3}ix^{\frac{3}{2}}\right) \tag{13}$$

каде $\mathcal{Z}_0$ е цилиндрична функција од нулти ред.

Како за $a=1$, $b=-1$, $c=0$ и $m=3$ равенката (12) се сведува на равенката (11), тоа имаме $T=\mathcal{Z}_0\left(\frac{2}{3}iu^{\frac{3}{2}}\right)$, а согласно (8)

$$T=\mathcal{Z}_0\left(\frac{2}{3}i|\lambda|z^{\frac{3}{2}}\left(\overline{z}-\overline{\zeta}\right)^{\frac{3}{2}}\right). \tag{14}$$

Што се однесува до првиот ред во (6), имаме $R=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\overline{z}^{3n}(z-\zeta)^{3(n-1)}}{3^n n!3^{n-1}(n-1)!}$.

$$\frac{\hat{d}R}{d\bar{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\,\bar{z}^{3n-1}(z-\zeta)^{3(n-1)}}{[3^{n-1}(n-1)!]^{2}}=|\lambda|^{2}\bar{z}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2(n-1)}\,\bar{z}^{3(n-1)}(z-\zeta)^{3(n-1)}}{[3^{n-1}(n-1)!]^{2}}=$$

$$=|\lambda|^{2}\bar{z}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[|\lambda|^{\frac{2}{3}}\,\bar{z}(z-\zeta)\right]^{3(n-1)}}{[3^{n-1}(n-1)!]^{2}}=|\lambda|^{2}\bar{z}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\overline{|\lambda|^{\frac{2}{3}}\,z(\bar{z}-\bar{\zeta})}\right]^{3(n-1)}}{[3^{n-1}(n-1)!]^{2}}=$$

$$=|\lambda|^{2}\bar{z}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{u}^{3(n-1)}}{[3^{n-1}(n-1)!]^{2}}=|\lambda|^{2}\bar{z}^{2}[1+S(\bar{u})]=|\lambda|^{2}\bar{z}^{2}\mathcal{Z}_0\left(\frac{2}{3}i\bar{u}^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=|\lambda|^{2}\bar{z}^{2}\mathcal{Z}_0\left(\frac{2}{3}i|\lambda|\bar{z}^{\frac{3}{2}}(z-\zeta)^{\frac{3}{2}}\right)$$

од каде што

$$R=|\lambda|^{2}\int\bar{z}^{2}\mathcal{Z}_0\left(\frac{2}{3}i|\lambda|\bar{z}^{\frac{3}{2}}(z-\zeta)^{\frac{3}{2}}\right)d\bar{z}\tag{16}$$

Накрај, со замена на (15) и (16) во (6) имаме

$$W=\phi(z)+\lambda z^{2}\int\bar{\phi}(z)\,d\bar{z}+z^{2}\int\left[|\lambda|^{2}\hat{\int}\bar{z}^{2}\mathcal{Z}_0\left(\frac{2}{3}i|\lambda|\bar{z}^{\frac{3}{2}}(z-\zeta)^{\frac{3}{2}}\right)d\bar{z}\right]\phi(\zeta)\,d\zeta+$$
$$+\lambda z^{2}\int\left[\mathcal{Z}_0\left(\frac{2}{3}i|\lambda|z^{\frac{3}{2}}(\bar{z}-\bar{\zeta})^{\frac{3}{2}}\right)-1\right]\bar{\phi}(\zeta)\,d\bar{\zeta}$$

или, со оглед на (5),

$$\begin{aligned}w=\phi(z)+z^{2}\Bigg\{&|\lambda|^{2}\int\left[\hat{\int}\bar{z}^{2}\mathcal{Z}_0\left(\frac{2}{3}i|\lambda|\bar{z}^{\frac{3}{2}}(z-\zeta)^{\frac{3}{2}}\right)d\bar{z}\right]\phi(\zeta)\,d\zeta+\\&+\lambda\int\left[\mathcal{Z}_0\left(\frac{2}{3}i|\lambda|z^{\frac{3}{2}}(\bar{z}-\bar{\zeta})^{\frac{3}{2}}\right)\right]\bar{\phi}(\zeta)\,d\bar{\zeta}\Bigg\}\end{aligned}\tag{17}$$

Теорема. Обопштените аналитички функции од трета класа (4) со карактеристика $\mu=\lambda z^{2}$, $(\lambda\in\mathbb{C})$ можат да се изразат преку т.н. цилиндрични функции од нулти ред по формулата (17).

Забелешка 1. Согласно врската $B=2\frac{\hat{d}}{d\bar{z}}$, што постои помеѓу операторот B на Белимовиќ [4] и операторниот извод по $\bar{z}$-ареоларниот извод $\frac{\hat{d}}{d\bar{z}}$, функциите $w=w(z)$ определени со која било од формулите (4), (6) или (17) можат да се интерпретираат како неаналитички функции чие што одстапување од аналитичност е „пропорционално“ со нивната комплексно конјугирана вредност со „коефициент на пропорционалност“ $2\lambda z^2$.

Забелешка 2. Ако ставиме $\lambda = \alpha + i\beta$, тогаш ареолошката равенка (3) е комплексен запис на системот парцијални диференцијални равенки

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = [2\alpha(x^2 - y^2) - 4\beta xy]u + [4\alpha xy + 2\beta(x^2 - y^2)]v \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = [4\alpha xy + 2\beta(x^2 - y^2)]u - [2\alpha(x^2 - y^2) - 4\beta xy]v \end{cases}. \tag{18}$$

Според тоа, $\begin{cases} u = u(x,y) = \mathrm{Re}\, w \\ v = v(x,y) = \mathrm{Im}\, w \end{cases}$ при што $w = w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ е функција определена со која било од формулите (4), (6) или (17), е решение на системот парцијални диференцијални равенки (18).

Литература

[1] Г. Н. Положий: Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного, p-аналитические и (p,q)-аналитические функции и некоторые их применения, Киев, 1965.

[2] B. Ilievski: On a class of $(r+is)$-analytical functions having common general exponential characteristic functions, Proceedings of the Mathematical conference in Pristina, 1994, 133-137.

[3] Э. Камке: Спровочник, IV издание, Москва, 1971.

[4] A. Bilimovic: Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique par rapport á une fonction analytique, C.R. Acad. Sci. Paris, 237 (1953), 694.

[5] С. Фемпл: 0 неаналитичким функцијама чије је одступање од аналитичности аналитичка функција, ГЛАС CCLIV - Одељење природно математичких наука, књ. 24, Београд, 1963.

ONE SUBCLASS OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS OF THIRD CLASS WITH CHARACTERISTIC $\mu=\lambda z^2$

Borko Ilievski

Abstract. The generalized analytic functions (4) of third class with characteristic $\mu=\lambda z^2$ ($\lambda\in\mathbb{C}$), defined by the oreolar differential equation (3), are written in two concise forms (6) and (17).

University „St. Kiril and Metodij“
Institute of Mathematics
P.O. Box 162
1000 Skopje
Republic of Macedonia