НЕКОИ ЗАБЕЛЕШКИ ЗА АНАЛИТИЧКАТА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА НА ДИСТРИБУЦИИ

Речкоски Влатко

Апстракт Во оваа работа прикажуваме една врска меѓу Теоремата на Банах-Штајнхаус и дистрибуцијата δ_+, нејзина аналитичка репрезентација како и една примена на истата во дистрибуцијата $P(t^{-1})$.

Во оваа работа даваме поинаков доказ на Хајзенберговата дистрибуција, некои забелешки за нејзината аналитичка репрезентација како и нејзината примена во други дистрибуции.

Основни поими и ознаки се: простор од основни функции $\mathcal{D}(\Omega)$; дуалниот простор или простор од дистрибуции на Шварц $\mathcal{D}'(\Omega)$; понатаму простор од бесконечно непрекинато – диференцијабилни функции на отворено множество Ω, $C^\infty(\Omega)$ и дуалниот простор $(C^\infty(\Omega))'$. Ќе ги користиме и меѓупросторите од $\mathcal{D}(\Omega)$ и $C^\infty(\Omega)$, кои се означуваат со $\mathcal{O}_\alpha$, како во ([1]).

Хајзенберговата дистрибуција, δ_+, е дефинирана ([1] стр.89) на следниов начин:

$$\langle \delta_+, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t + i\varepsilon} \, dt \,, \quad \varphi \in \mathcal{O}_\alpha \,, \quad \alpha < 0 \,.$$

За кое било $\varepsilon > 0$ интегралот постои, бидејќи подинтегралната функција е $O(|t|^{-1+\alpha})$ и $\alpha < 0$.

Треба да се покаже уште линеарност и непрекинатост на δ_+.

Со функциите $\Lambda_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{t + i\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, е дадена една фамилија од регуларни дистрибуции.

Познато е дека:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t+i\varepsilon}\,dt = \frac{1}{2}\,\delta - \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|>1} dt$$

$$=\frac{1}{2}\delta(\varphi)-\frac{1}{2\pi i}C\cdot H\cdot\frac{1}{t}(\varphi)\text{([3] стр.739, Теорема 101)},$$

каде δ е Диракова дистрибуција, а "$C\cdot H\cdot\dfrac{1}{t}$" е Кошиева главна вредност по однос на "$\dfrac{1}{t}$". Ако се знае дека Кошиевата главна вредност е дистрибуцијата, тогаш:

$$\delta_+(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t+i\varepsilon}\,dt = \frac{1}{2}\,\delta(\varphi) - \frac{1}{2\pi i}\,C\cdot H\cdot\frac{1}{t}(\varphi)$$

е дистрибуција. Меѓутоа без тој факт, на пример, во ([1] стр. 89-92) е докажано со помош на хармониски функции дека δ_+ е дистрибуција.

Овде ќе дадеме еден поинаков доказ со помош на некои факти од функционална анализа, пред сè, познатата теорема на Банах-Штајнхаус.

Доказ. Како што веќе спомнавме погоре секој функционал:

$$\Lambda_\varepsilon(\varphi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t+i\varepsilon}\,dt\,, \quad \varepsilon>0$$

е регуларна дистрибуција, т.е. е непрекината линеарен функционал на $\mathcal{D}(\Omega)$. (Во (*) зедовме $\varphi\in\mathcal{O}_\alpha$, а овде земаме $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$; ова е можно заради теоремата 6.4. ([1] стр. 83)). Забележуваме исто така дека постои:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Lambda_\varepsilon(t) = \delta_+(\varphi)\,.$$

Ако земеме $\varphi \in \mathcal{D}_k$, каде K е компактно подмножество од Ω, а $\mathcal{D}_k$ се состои од сите функции од $\mathcal{D}(\Omega)$ со носачи во K, тогаш јасно постои:

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \Lambda_\varepsilon(t) = \delta_+(\varphi)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}_k\,.$$

Но $\mathcal{D}_k$ е простор на Фреше ([2]), па сега со примена на теоремата на Банах-Штајнхаус ([2]) следува дека δ_+ е непрекинат функционал на $\mathcal{D}_k$, од каде и на $\mathcal{D}(\Omega)$ ([2] стр. 156). Следователно δ_+ е дистрибуција.

На сличен начин се покажува и:

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t-i\varepsilon}\,dt$$

е дистрибуција која се означува со:

$$\delta_-(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t-i\varepsilon}\,dt = \frac{1}{2}\,\delta(\varphi) + \frac{1}{2\pi i}\,C\cdot H\cdot \frac{1}{t}\,(\varphi)\,.$$

Од каде добиваме дека:

$$\delta = \delta_+ + \delta_-\,, \quad C\cdot H\cdot\frac{1}{t} = \pi i(\delta_- - \delta_+)\,.$$

Уште еден карактеристичен пример од овој вид е функционалот дефиниран со:

$$P(t^{-n})(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{(t+i\varepsilon)^n} + \frac{1}{(t-i\varepsilon)^n}\Big)\varphi(t)\,dt\,.$$

Со парцијална интеграција добиваме:

$$\begin{aligned} P(t^{-n})(\varphi) &= \lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{1}{2}\,\frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\varphi^{(n-1)}(t)}{t+i\varepsilon} + \frac{\varphi^{(n-1)}(t)}{t-i\varepsilon}\Big)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(n-1)!}[-2\pi i\delta_+(\varphi^{(n-1)}) + 2\pi i\delta_-(\varphi^{(n-1)})] \\ &= \frac{\pi i}{(n-1)!}[\delta_-(\varphi^{(n-1)}) - \delta_+(\varphi^{(n-1)})] \\ &= \frac{(-1)^{n-1}\pi i}{(n-1)!}[\delta^{(n-1)} - \delta^{(n-1)}]\,, \end{aligned}$$

па конечно

$$P(t^{-n})(\varphi) = \frac{(-1)^{n-1}\pi i}{(n-1)!}[\delta_-^{(n-1)} - \delta_+^{(n-1)}].$$

Во однос на аналитичката репрезентација на разгледуваните дистрибуции ги даваме следниве забелешки:

Ако $R > 1$ и носачот на функцијата φ ([2]) се содржи во множеството $|t| \geq R$, тогаш имаме:

$$\delta_+(\varphi) = \frac{1}{2}\delta(\varphi) - \frac{1}{2\pi i} C \cdot H \cdot \frac{1}{t}(\varphi) = 0 - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|\geq R} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt$$

$$|\delta_+(\varphi)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|\geq R} \frac{|\varphi(t)|}{t}\, dt.$$

Што значи дека $\delta_+ = 0\ (|t|^{-1})$ ([1]) и затоа може да се продолжи на просторот $\mathcal{O}_\alpha$ за $\alpha + (-1) + 1 < 0$, т.е. $\alpha < 0$. Слично и за дистрибуцијата δ_-. Така добиваме дека δ_+ и δ_- имаат Кошиева репрезентација определена во ([1]):

$$\hat{\delta}_+(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i z}, & \operatorname{Im} z > 0 \\ 0, & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

$$\hat{\delta}_-(z) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Im} z > 0 \\ -\dfrac{1}{2\pi i z}, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Забелешка: Од дефиницијата δ_+ и δ_-

$$\delta_+(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t+i\varepsilon}\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i(t+i\varepsilon)} - 0\right]\varphi(t)\, dt$$

од каде веднаш произлегува дека

$$\hat{\delta}_+(\varphi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i z}, & \operatorname{Im} z > 0 \\ 0, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Потполно истото го имаме и за δ_+.

Што се однесува до аналитичката репрезентација на $P(t^{-n})$ од самата дефиниција имаме:

$$\hat{P}(t^{-n})(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2z^n}, & \operatorname{Im} z > 0 \\ -\dfrac{1}{2z^n}, & \operatorname{Im} z < 0\,. \end{cases}$$

Специјално за $n = 1$, ја имаме Кошиевата главна вредност $C \cdot H \cdot \dfrac{1}{t}$, т.е. $P(t^{-1}) = C \cdot H \cdot \dfrac{1}{t}$ и аналитичката репрезентација ќе изгледа:

$$\hat{P}(t^{-1})(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2z}, & \operatorname{Im} z > 0 \\ -\dfrac{1}{2z}, & \operatorname{Im} z < 0\,. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бремеран Г.: *Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье*, МИР, Москва 1968.

[2] Rudin W.: *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, Second Edition, 1991.

[3] Шварц Л.: "*АНАЛИЗ*", Том I, МИР, Москва 1972.

Гимназија "Св. Климент Охридски"
Охрид,
Македонија

SEVERAL NOTES ABOUT THE ANALYTICAL REPRESENTATION OF A DISTRIBUTION

Vlatko Rechkoski

Abstract: This work gives one proof of the distribution of Heisenberg and several notes about the analytical representation of a distribution. In this work we give one connection between Theorem of Banach-Steinhouse and distribution δ_+, its analytical representation as well as one application on this distribution for distribution $P(t^{-1})$.

Gimnasium "St. Kliment Ohridski"

Ohrid,

Macedonia