Математички Билтен ISSN 0351-336X
35(LXI)
2011(67-71)
Скопје, Македонија

ЗА ОБЛИКОТ НА РЕШЕНИЕТО НА ЕДНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ВТОР РЕД СО ФУНКЦИОНАЛНИ КОЕФИЦИЕНТИ

ЛАЗО А. ДИМОВ

Апстракт. Во овој труд за диференцијалната равенка (2) се определуваат услови таа да се сведе на диференцијална равенка со облик (1) а потоа со формулите (2'), (3') и (4') се добива и нејзиното општо решение.

1. Бројни технички и технолошки процеси при нивното разрешување се сведуваат на диференцијалната равенка од втор ред со константни коефициенти

$$y''(t) + 2ay'(t) + b^2y(t) = 0 \tag{1}$$

каде што a и b се димензионирани константи ([4]). Ние овде од мате-
матички аспект ќе ги сметаме за бездимензионални и позитивни константи.

Равенката (1) има карактеристична равенка

$$r^2 + 2ar + b^2 = 0$$

Нејзини решенија се :

$$r_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$$

и притоа може да се запишат во облик

$$r_{1/2} = (-\frac{a}{b} \pm \sqrt{(\frac{a}{b})^2 - 1})b = (-k \pm \sqrt{k^2 - 1})b,\ k = \frac{a}{b}.$$

Сега во зависност од големината на k општото решение се добива согласно со формулите:

(2) за $0 < k < 1$, $y = e^{-btk}(c_1 \cos lbt + c_2 \sin lbt)$, притоа $l = \sqrt{1-k^2}$. Решението во овој случај е осцилаторно.

(3) за $k = 1$, $y = e^{-bt}(c_1 + c_2t)$, решението е монотона функција.

(4) за $k > 1$, $y = c_1e^{btm} + c_2e^{btn}$, притоа $m = -k - \sqrt{k^2-1}, n = -k + \sqrt{k^2-1}$, решението е монотона функција.

2. Ако во диференцијалната равенка од втор ред со функционални коефициенти

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0, \tag{2}$$

воведеме нова независнопроменлива со релацијата $x = x(t)$, се добива диференцијалната равенка

$$y''(t) + [f(x)x'(t) - \frac{x''(t)}{x'(t)}]y'(t) + g(x)x'(t)^2 y(t) = 0. \tag{3}$$

За да равенката (3) се трансформира во диференцијална равенка (1) треба да важат релациите:

$$f(x)x'(t) - \frac{x''(t)}{x'(t)} = 2a, \tag{4}$$

$$g(x)x'(t)^2 = b^2. \tag{5}$$

Со елиминација на $x'(t)$ и $x''(t)$ од релациите (4) и (5) се добива релацијата

$$\frac{2g(x)f(x) + g'(x)}{4g(x)\sqrt{g(x)}} = \frac{a}{b} = k. \tag{6}$$

Сега со диференцирање на (6) ги елиминираме параметрите a и b и ја добиваме функционалната врска :

$$2f(x)g(x)g'(x) - 4g^2(x)f'(x) - 2g(x)g''(x) + 3g'(x)^2 = 0. \tag{7}$$

А од релацијата (5) следува функционална врска меѓу старата и новата независно променлива :

$$bt = \int \sqrt{g(x)}dx. \tag{8}$$

Со ова нешто ние практично ја докажавме следната

Теорема 1. Диференцијалната равенка (2) може да се сведе на диференцијална равенка со константни коефициенти од облик (1) ако фигурирачките функции $f(x)$ и $g(x)$ го задоволуваат условот (7), а новата независно променлива t се добива од релацијата(8). Притоа општото решение ќе се добие согласно формулите (2), (3) и (4) во кои се заменува bt со (8) , а количникот $\frac{a}{b} = k$ се добива со формулата (6).

За општото решение ги имаме формулите:

(2') за $0 < k < 1$, $y = e^{-k\int\sqrt{g(x)}dx}(c_1 \cos l \int \sqrt{g(x)}dx + c_2 \sin l \int \sqrt{g(x)}dx)$, каде што $l = \sqrt{1-k^2}$.

(3') за $k = 1$, $y = e^{-\int\sqrt{g(x)}dx}(c_1 + c_2 \int \sqrt{g(x)}dx)$.

(4') за $k > 1$, $y = c_1 e^{m\int\sqrt{g(x)}dx} + c_2 e^{n\int\sqrt{g(x)}dx}$,притоа $m = -k - \sqrt{k^2-1}$, $n = -k + \sqrt{k^2-1}$.

За природата на решението можеме да кажиме дека во случајот (2') е осцилаторно, а во случаите (3') и (4') е монотоно.

Пример 1. Во диференцијалната равенка

$$y'' + (c\sqrt{x} - \frac{1}{2x})y' + xy = 0,$$

фигурирачките функции

$$f(x) = c\sqrt{x} - \frac{1}{2x}, g(x) = x,$$

го задоволуваат условот (7), за k од (6) се добива $k = \frac{c}{2}$. Согласно формулата за смената имаме

$$\int g(x)dx = \int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

Во зависност од вредноста на c ги имаме следните случаи за решението на диференцијалната равенка

1) за $0 < c < 2$, $y = e^{-\frac{c}{3}x^{\frac{3}{2}}}(c_1 \cos \frac{1}{3}\sqrt{4-c^2}x^{\frac{3}{2}} + c_2 \sin \frac{1}{3}\sqrt{4-c^2}x^{\frac{3}{2}})$, решението е осцилаторно.

2) за $c = 2$, $y = (c_1 + c_2 x^{\frac{3}{2}})e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$, решението е монотоно.

3) за $c > 2$, $y = c_1 e^{-\frac{c+\sqrt{c^2-4}}{3}x^{\frac{3}{2}}} + c_2 e^{\frac{-c+\sqrt{c^2-4}}{3}x^{\frac{3}{2}}}$, решението исто така е монотона функција.

Пример 2. Ојлеровата диференцијална равенка од втор ред

$$x^2y'' + cxy' + y = 0,$$

запишана во облик (2) е

$$y'' + \frac{c}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0.$$

фигурирачките функции

$$f(x) = \frac{c}{x},\ g(x) = \frac{1}{x^2},$$

го задоволуваат условот (7), а за k од (6) се добива $k = \frac{c-1}{2}$. Согласно формулата за смената на независно променливата имаме

$$\int g(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x.$$

Во зависност од вредноста на c ги имаме следните случаи за решението на диференцијалната равенка

1) за $1 < c < 3$, $y = x^{-\frac{c-1}{2}}(c_1 \cos \frac{1}{2}\sqrt{3+2c-c^2} \ln x + c_2 \sin \frac{1}{2}\sqrt{3+2c-c^2} \ln x)$, решението е осцилаторно.

2) за $c = 3$, $y = (c_1 + c_2 \ln x)\frac{1}{x}$, решението е монотоно.

3) за $c > 3$, $y = c_1 x^{\frac{1-c-\sqrt{c^2-2c-3}}{2}} + c_2 x^{\frac{1-c+\sqrt{c^2-2c-3}}{2}}$, решението е монотоно.

Забелешка. Во [2] стр.383 пр. 2.75 е докажано дека диференцијалната равенка (2) со слична смена може да се трансформира во диференцијалната равенка со константни коефициенти

$$y'' + ay' + y = 0.$$

Оваа равенка е специјален случај од равенката (1) разгледана овде.

Литература

[1] Аинс , *Обыкновные дифференциальные равнения*, ИЛ Москва , (1953).
[2] Е. Камке , *Справочник по обыкновеным дифференциальныем уравнениям*, ГИ Москва , (1951).
[3] Д. Димитровски, Ј. Митевска , *Линеарни тригонометрии од четврти и шести ред*, ПМФ - Скопје, Посебни изданија , (1996).
[4] B. Vujanovic, D. Spasic, *Metodi optimizacije*, Univerzitet u Novom Sadu, fakultet tehnickih nauka , (1997).
[5] Л. Димов , *За решавањето на една диференцијална равенка од втор ред*, Математички билтен, Скопје , (1996).
[6] Л. Димов, *За обликот на решението на една линеарна диференцијална равенка од втор ред со функционални коефициенти,* Осми македонски симпозиум по диференцијални равенки, Охрид *30.09.2004–03.10.2004.*
[7] Л. Димов, *За обликот на решението на една диференцијална равенка од трети ред со функционални коефициенти,* Четврти конгрес на математичарите на Македонија, Струга *19–22.10.2008.*

ABOUT THE SHAPE OF THE SOLUTION OF ONE DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER WITH FUNCTIONAL COEFFICIENTS

Lazo A. Dimov

S u m m a r y

In this work about the differential equation (2) we determine the circumstances in which we can transforme it in differential equation in the form (1) and then with the formulas (2'), (3') and (4') we determine its solution.

Машински Факултет Скопје