Математички Билтен
11-12 (XXXVII-XXXVIII)
1987-1988 (39-46)
Скопје, Југославија

МАТЕМАТИЧКА КОНСТРУКЦИЈА НА 3-D ХЕЛИОТЕХНИЧКИ ОПТИМАЛЕН КОЛЕКТОРСКИ СИСТЕМ СО УНИФОРМНА ОСВЕТЛЕНОСТ

Драган Димитровски, Мијат Мијатовиќ, Добрило Тошиќ

Вовед. Формирање на диференцијалните равенки на проблемот.

Брзиот развиток на директната конверзија на сончевата енергија во електрична, откривањето на нови и квалитетни видови фото-ќелии бара и нови начини на конструкција на концентраторите на сончевата енергија со нови технички барања. Така, досегашните колекторски хелиотехнички системи, главно со параболични огледала и термички апсорбери, ќе бидат заменувани со апсорбери облепени со фото-ќелии, и огледала кои ќе обезбедуваат не фокусирана, туку оптимална и хомогена осветленост, и кои, според тоа, ретко ќе бидат параболични. Затоа е неопходна и нова математичка конструкција на проблемот на работа на хелиотехничкиот систем со непосредна конверзија на сончевата енергија во електрична.

Ползувајќи ги основните идеи [1], [2] во трудовите [3], [4], [5] дадовме математички основи на конструкцијата на разни видови хелиотехнички системи.

Продолжувајќи ја оваа идеја, ние сега ќе се обидеме да го решиме математички проблемот на конструкцијата на хелиотехничкиот систем со следниве својства:

-и концентраторот (огледалото) и апсорберот да се во вид на ротациони површини;

-системот да обезбедува стална концентрација на осветленоста на апсорберот со коефициент к, кој може да се избира во онаа големина која ќе зависи од градежната конструкција на системот и од габаритните услови;

-конструкцијата да обезбедува рамномерен (униформен) флукс по целата површина на апсорберот (изо - осветленост, или хомогена осветленост), покриен (или не) со фото-ќелии;

-паѓањето на акумулираната светлина врз апсорберот секогаш да биде оптимално, т.е. под прав агол во однос на површината. Тоа гарантира максимален трансфер на енергијата, со минимални губитоци.

Претпоставувајќи дека равенките на површините на огледалото и апсорберот се респективно:

$$z = f(x,y) \text{ и } Z = F(X,Y),$$

односно равенките на нивните меридијани се $z=f(x)$ и $Z=F(X)$, горните барања можеме да ги формулираме преку следниве диференцијални равенки (наместо z пишуваме y):

-равенката на светлинскиот зрак, носител на енергијата

$$Y-y = \frac{y'^2-1}{2y'}(X-x); \qquad (1)$$

-равенката која што е услов на нормалното паѓање на рефлектираните зраци врз апсорберот

$$-\frac{1}{Y'(X)} = \frac{y'^2-1}{2y'(x)}; \qquad (2)$$

-равенката на хомогена осветленост на апсорберот (за ротационите површини):

$$K = \frac{xdx}{\sqrt{1+Y'^2(X)}XdX} = \text{const.} \qquad (3)$$

Системот равенки (1), (2), (3) е систем диференцијални равенки по непознатите меридијани на огледалото $y(x)$ и апсорберот $Y(X)$, со нивните независни променливи x и X, и по нивната врска $X(x)$.

Овој нелинеарен систем со 3 непознати функции ќе се обидеме да го решиме така што ќе го сведеме на една обична диференцијална равенка од III ред, која потоа ќе ја претвориме во еден систем погоден за нумеричко решавање.

Ако равенката (3) ја решиме по $Y'(X)$, ќе имаме

$$Y' = \frac{1}{KXX'} \sqrt{x^2-K^2(XX')^2}, \qquad (4)$$

каде што $Y'=Y'(X)$ и $X=X'(x)$.

Ако (1) ја диференцираме по x, ќе имаме

$$X'(x)Y'(X)=y' + \left(\frac{y'^2-1}{2y'}\right)'x(X-x) + \left(\frac{y'^2-1}{2y'}\right)(X'(x)-1) \qquad (5)$$

Ако од (4) и (5) го елиминираме $Y'(X)$, ќе имаме

$$X\left[y'+\left(\frac{y'^2-1}{2y'}\right)'_x(X-x)+\left(\frac{y'^2-1}{2y'}\right)(X'(x)-1)\right] = \frac{1}{K}\sqrt{x^2-K^2(XX')^2}, \qquad (6)$$

додека елиминацијата на $Y'(X)$, сега од (2) и (4), дава

$$\frac{2y'}{1-y'^2} = \frac{1}{KXX'}\sqrt{x^2-K^2(XX')^2}. \qquad (7)$$

Така, сега, со равенките (6) и (7) имаме упростен систем само со две непознати функции $y(x)$ и $X(x)$ по ист аргумент x.

Сега треба да ги елиминираме $X(x)$ и $X'(x)$. Од (7) наоѓаме

$$KXX' = \frac{1-y'^2}{1+y'^2}x \qquad (8)$$

од каде што, множејќи со $dx = dX/X'$ и интегрирајќи, имаме

$$\frac{d(X^2(x))}{2} = \frac{1}{K}\,\frac{1-y'^2}{1+y'^2}\,xdx,$$

а од тоа, основната врска е

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{K}\int_0^x \frac{1-y'^2}{1+y'^2}\,xdx}. \qquad (9)$$

Ако, сега, од (6) и (7) го елиминираме квадратниот корен на десната страна, имаме, по средувањето

$$1 + \frac{y''}{y'}(X-x)-X'\frac{1+y'^2}{1-y'^2} = 0. \qquad (10)$$

Ако равенката (10) ја помножиме со X, и ги елиминираме по ред X^2, XX' и X од (9) и (8), добиваме една равенка само со една непозната функција $y(x)$, која, ако се реши, ќе го добие обликот на меридијанот на огледалото:

$$y''\left[\frac{2}{K}\int_0^x \frac{1-y'^2}{1+y'^2}xdx - x\sqrt{\frac{2}{K}\int_0^x \frac{1-y'^2}{1+y'^2}xdx}\right] = \left[\frac{x}{K} - \sqrt{\frac{2}{K}\int_0^x \frac{1-y'^2}{1+y'^2}xdx}\right]y' \qquad (11)$$

Ова е интегрален облик на равенката на огледалото. Ако сакаме да добиеме нормален (каноничен) облик на оваа равенка (за испитување егзистенција на решението, ефектуирање на апроксимациите по Picard, сингуларитети и слична квалитативна анализа), треба равенката (1) да ја решиме по интегралот:

$$\frac{2}{K}\int_0^x \frac{1-y'^2}{1+y'^2}\,xdx = \frac{1}{2y''^2}\left[(xy''-y')^2 + {} \right.$$
$$\left. {} + \frac{2}{K}xy'y''+(xy''-y')\sqrt{(xy''-y')^2 + \frac{4}{K}xy'y''}\right],$$

од каде што со диференцирање и по средување, следува една нелинеарна обична диференцијална равенка од III ред, чијшто нормален облик, т.е. обликот решен по y''', со оглед на сложеноста на коефициентот пред y''', не ветува многу за успешноста на анализата на решението

$$y'''\cdot A(x,y,y',y'')+y''^2\cdot B(x,y',y'')+y'''^3\cdot C(x,y',y'') = 0,$$

односно конкретно:

$$\begin{aligned} y'''\Big[&-2(xy''-y')^2-\frac{4}{K}(xy'y'')-2(xy''-y')\sqrt{(xy''-y')^2+\frac{4}{K}xy'y''}+\\ &+2xy''(xy''-y')+xy''\sqrt{(xy''-y')^2+\frac{4}{K}xy'y''}+\\ &+\frac{2}{K}xy'y''+\frac{x(xy''-y')^2+\frac{2}{K}xy'(xy''-y')}{\sqrt{(xy''-y')^2+\frac{4}{K}xy'y''}}\Big]+\\ &+(y'')^2\left[\frac{2}{K}(xy''+y')+\frac{\frac{2}{K}(xy''-y')(xy''-y')}{\sqrt{(xy''-y')^2+\frac{4}{K}xy'y''}}\right]-\\ &-(y'')^3\left[\frac{2}{K}\,x\frac{1-y'^2}{1+y'^2}\right]=0. \end{aligned} \tag{11'}$$

Затоа ние нема да работиме со обликот (11'), туку со обликот (11), кој ќе го замениме со еден систем од I ред. Со смената

$$\frac{2}{K}\int_0^x \frac{1-y'^2}{1+y'^2}\,xdx = z \tag{12}$$

(каде што тогаш поради позитивноста се подразбира $y'^2 \le 1$, т.е. $y' \le 1$, што значи плитко огледало, т.е. такво чиј апсорбер не го надминува горниот раб на огледалото), го имаме следниов систем диференцијални равенки од I ред

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{\frac{x-Kzu}{x+Kzu}}\\ z' &= u\\ u' &= \frac{z-\frac{x}{K}}{Kxz}\cdot\frac{x^2-K^2z^2u^2}{z^2-xz}+\frac{1}{x}u-\frac{1}{z}u^2 \end{aligned} \tag{13}$$

кој за вообичаените услови за огледалото: за $x=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ дава $z(0)=0$, $z'(0)=0$, така што системот (13) има сингуларни точки $x=0$, $z=0$ и $z=x$. И покрај овие сингуларитети (кои се привидни), системот (13) е основа на нумеричкото решавање на равенката (11).

Со смената (12), и системот (13) може да се замени со една попроста нормална равенка од II ред:

$$z'' = \frac{1}{K}\left(z-\frac{x}{K}\right)\frac{x}{z}+\frac{1}{x}z'+\frac{x^2-Kz^2}{zx(z-x)}\,z'^2 \tag{14}$$

каде што се видливи истите сингуларни точки. За да го подготвиме системот (13), односно равенката (14) за нумеричко решавање доволно е да покажеме дека постои аналитичко решение.

Егзистенција на аналитичкото решение

Нека $y'(x) \le 1$ во целото дефиниционо подрачје на $y(x)$. Тогаш $0 \le \frac{1-y'^2}{1+y'^2} \le 1$, и интегралот $\frac{2}{K}\int_0^x \frac{1-y'^2}{1+y'^2}xdx$ е позитивна аналитичка функција во $[0,x]$. Исто така и коренот

$$0 \le \sqrt{\frac{2}{K}\int_0^x \frac{1-y'^2}{1+y'^2}xdx} \le \frac{x}{\sqrt{K}}$$

е позитивна аналитичка функција во $[0,x]$. За овој корен ќе важи и конвергентен потенцијален биномен ред (развој) ако поткорената величина е од вид $1+h$, $h < 1$. Затоа ќе побараме решение на (11) во вид на редот

$$y(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

каде што условите $y(0)=y'(0)=0$ даваат $a_0=a_1=0$, а условот на парноста $y(-x)=y(+x)$ дава непарните коефициенти $a_3=a_5=a_7=\ldots=0$ да се нули. Бараме решение на (11) во вид на редот

$$y(x) = a_2x^2+a_4x^4+a_6x^6+\ldots \tag{15}$$

Ако е тој конвергентен во $[0,x]$, конвергентни се (рамномерно) и редовите

$$\begin{aligned} y' &= 2a_2x+4a_4x^3+6a_6x^5+\ldots+2na_{2n}x^{2n-1}+\ldots \\ y'' &= 2\cdot 1\cdot a_2+4\cdot 3\cdot a_4x^2+6\cdot 5\cdot a_6x^4+\ldots \end{aligned} \tag{16}$$

Така, сега можеме да напишеме и ред за изразот (12)

$$\frac{1-y'^2}{1+y'^2} = -1+2\frac{1}{1-(-y'^2)} = 1-2\left[y'^2-y'^4+y'^6-y'^8+\ldots\right] =$$

$$= 1-8a_2^2x^2-(32a_2a_4-32a_2^4)x^4-2(16a_4+24a_2a_6-128a_2^3a_4+64a_2^6)x^6+\ldots$$

од каде што

$$\begin{aligned} \frac{2}{K}\int_0^x \frac{1-y'^2}{1+y'^2}xdx = \frac{1}{K}\Big[&x^2-2\cdot 2a_2^2x^4-2\cdot\frac{16}{3}(a_2a_4-a_2^4)x^6- \\ &-2(4a_4^2+6a_2a_6-32a_2^3a_4+16a_2^6)x^8+\ldots\Big] \end{aligned} \tag{17}$$

а потоа, применувајќи биномен ред, имаме

$$\sqrt{\frac{2}{K}\int_0^x \frac{1-y'^2}{1+y'^2}x dx} = \frac{x}{\sqrt{K}}\Big[1-2a_2^2x^2-\frac{16}{3}(a_2a_4-a_2^4)x^4- \\ -(4a_4^2+6a_2a_6-32a_2^3a_4+16a_2^6)x^6+\dots\Big] \qquad (18)$$

Ако редовите (16), (17) и (18) ги внесеме во равенката (11), го добиваме идентитетот

$$[2\cdot 1a_2+4\cdot 3a_4x^2+6\cdot 5a_6x^4+8\cdot 7a_8x^6+\dots]\cdot \\ \cdot\Big[\frac{1}{K}(x^2-2\cdot 2a_2^2x^4-2\cdot\frac{16}{3}(a_2a_4-a_2^4)x^6-2(4a_4^2+6a_2a_6-32a_2^3a_4+16a_2^6)x^8+\dots - \\ -\frac{x^2}{\sqrt{K}}(1-2a_2^2x^2-\frac{16}{3}(a_2a_4-a_2^4)x^4-(4a_4^2+6a_2a_6-32a_2^3a_4+16a_2^6)x^6+\dots\Big] = \\ = \Big[\frac{x}{K}-\frac{x}{\sqrt{K}}(1-2a_2^2x^2-\frac{16}{3}(a_2a_4-a_2^4)x^4-(4a_4^2+6a_2a_6-32a_2^3a_4+16a_2^6)x^6+\dots\Big]\cdot \\ \cdot[2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\sqrt{a}_5x^4+\dots].$$

Ако измножиме, ги подредиме коефициентите пред степените x^K и ги изедначиме коефициентите пред еднаквите степени, добиваме:

a_2 е произволен (кривина на огледалото за x=0);

$$a_4 = -\frac{a_2^3}{\sqrt{K}-1}, \\ a_6 = \frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt{K}+9}{(\sqrt{K}-1)^2}\,a_2^5,\dots \qquad (19)$$

Така, за огледалото y(x) имаме приближно решение во вид на ред чии први три члена се

$$y(x) = a_2\Big[x^2-\frac{a_2^2}{(\sqrt{K}-1)}x^4+\frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt{K}+9}{(\sqrt{K}-1)^2}\,a_2^4x^6+\dots\Big] \qquad (20)$$

Произволноста на a_2 доаѓа поради недодефинираноста на задачата на Коши: за равенката (11) од трет ред ние сме одбрале однапред само два услова: x=0, y(0)=0, y'(0)=0, додека третиот услов нека биде произволноста на кривината во x=0, што сега за сега нека остане произволно, а ќе може директно да се определи од техничките услови на проблемот: габаритот и плиткоста на огледалото, димензиите, пресметка на тежината и силата на ветерот, и слично.

Со истите овие коефициенти од (18) и (19) наоѓаме ред за функцијата X(x) дадена со (9) која претставува врска меѓу апсциситe, а апсорберот Y(X) можеме исто така аналитички да го определиме пак преку (2)

$$Y'(X) = 2\frac{y'(x)}{1-y'^2(x)} = 2y'(x)[1+y'^2+y'^4+\dots].$$

Така имаме обезбедено аналитичко решение на проблемот, кое за разни концентрации K обезбедува соодветна нумеричка конструкција на функциите $y(x)$, $Y(X)$ и $X(x)$, што ќе биде предмет на посебна анализа.

Оваа математичка конструкција обезбедува голем број различни технички решенија за вакви типови хелиотехнички системи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] I.V. Baum, S.O. Mamedniazov: Equalization of irradiation field on receiver surface. Applied Solar Energy 13(5), 27 (1977)

[2] U.H. Kurzweig, J.P. Benson: Iso-intensity absorber configuration for parabolic concentrators, Solar Energy, 29, 195 (1982)

[3] Mijatović, Veselinović, Dimitrovski: Inverse iso-intensity absorber problem, Solar Energy, vol. 37, No 1, 1986

[4] Mijatović, Dimitrovski, Veselinović: Refractor - absorber systems with uniform concentrations, Journal of Optics, vol. 18, nos 5-6, Paris, 1987

[5] Димитровски, Мијатовиќ, Веселиновиќ: Системи диференцијални равенки за подобрување на конструкцијата на сончевите колектори, Прилози, МАНУ, Скопје

LA CONSTRUCTION MATHÉMATIQUE D'UN SYSTEME 3-D HÉLIO-TECNIQUE OPTIMUM AVEC LA CONCENTRATION UNIFORME

Résumé

Le devellopement récent accéléré de la conversion directe de l'énergie du Soleil en énérgie électrique, la découverte de photo-éléments nouveaux, exige une nouvelle construction des collecteurs de l'énergie du Soleil, ainsi que les concentrateurs traditionels paraboliques n'y seront pas dominants.

Dans ce papier on forme le système des équations différentieles (1), (2), (3) qui assurent la concentration uniforme sur l'apsorbeur, l'incidence normale des rayons sur l'apsorbeur, le système hélio-technique le miroir - l'absorbeur étant tous les deux surfaces de révolution (images). L'équation intégrale (11) ayant une forme normale (11') n'étant pas convenable pour l'analyse et l'effectuation de la solution, on a d'abord bésoin de constater l'existence d'une solution analytique. Système équivalent (13) et l'équation correspondante (14) permettent une solution analytique (20) qui peut servir comme la source de la réalisation d'une noumèrique diversifiée quant à la concentration k et les conditions techniques dans l'édification du système hélio-technique.

Dragan Dimitrovski,
L'Institut des Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Skopie

Mijat Mijatović,
L'Institut de la Physique,
Faculté des Sciences,
Skopie

Dobrilo Tošić,
Faculte d'Éléctrotechnique,
Belgrad