ЕДНО ОБОПШТУВАЊЕ НА ЛЕМАТА НА ЖОРДАН И НЕКОИ НЕГОВИ ПРИМЕНИ

ДРАГАН ДИМИТРОВСКИ

I. УВОД

Познатото неравенство на Жордан [1]

(1) $$\frac{2}{\pi}\, x \leqslant \sin x \leqslant x \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

покрај многубројните примени, може да се ползува и за докажување на едно ново неравенство

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x}\, dx < \frac{\pi}{2R}\,(1 - e^{-R}) \qquad (R > O)$$

кое носи исто име[1]). Со помошта на неравенството (2) на Жордан во Теоријата на аналитичните функции лесно се докажува таканаречената лема на Жордан, која што игра важна улога при пресметувањето на извесни класи определени интеграли[2]). Таа лема гласи ([2]):

1° Ако е $F(z)$ аналитична функција во горната полурамнина и по реалната оска, со исклучок на конечен број полови, од кои ниту еден не лежи на реалната оска;

(3) 2° ако $F(z) \longrightarrow 0$ униформно кога $z \longrightarrow \infty$ во горната полурамнина и по реалната оска;

3° ако е m реален позитивен параметар,

---

[1]) Еден елементарен доказ на неравенствата (1) и (2) може да се најде во книгата: Д. С. Митриновиќ: Зборник математичких проблема I, друго издање, Београд 1958, стр. 157, проблем бр. 150.

[2]) Особено разработана примена на неравенствата на Жордан и на неговата лема може да се најде во книгата: Д. С. Митриновиќ: Збоник математичких проблема III, во одделот „Комплексан интеграл и рачун остатака,„ стр. 49 — 97.

тогаш

$$\int\limits_C \mathrm{F}_{(z)}\, e^{imz}\, dz \longrightarrow O,\ R \longrightarrow \infty\,;$$

каде што C е полукруг којшто лежи во горната полурамнина со центар во координантниот почеток и радиус R.

Оваа лема често се ползува при пресметувањето на определените на интеграли од облик

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x) \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases} dx \tag{4}$$

преку примената на теоремата на Cauchy за сметањето со остатоците и примената на граничниот процес $R \longrightarrow \infty$. Во последниот израз функцијата $F(x)$ е таква $F(z)$ да ги има наброените особини 1° — 3°; во партикуларен случај $F(x)$ може да биде рационална функција.

II. ОБОПШТУВАЊЕ. Ние ќе ја обопштиме лемата на Жордан преку следната

ЛЕМА: 1° Ако е $F(z)$ аналитична функција од комплексна променлива z во областа и на границите на областа

$$D: \qquad 0 \leqslant \arg\, z \leqslant \frac{\pi}{n}\,,$$

со исклучок на конечен број сингуларитети кои сите се полови од кои ниеден не лежи на границите на областа;

2° $F(z)$ има особина

$$|F_{(z)}| < A\, R^{n-2}\,,\ |z| = R \longrightarrow \infty\,,\ (A > 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

за секое θ од областа D;

3° ако $P_n\,(z)$ е полином од z со реални позитивни коефициенти, тогаш

$$\int\limits_G F_{(z)}\, e^{iP_n(z)}\, dz \longrightarrow 0,\ R \longrightarrow \infty\,;$$

каде G е лак од кругот $|z| = R$ определен со

$$0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n}\,.$$

ДОКАЗ: Воведувајќи поларни координати, интегралот може да се напише во облик

$$\int_G F_{(z)}\, e^{iP_n(z)}\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{n}} F(Re^{i\theta})\, e^{iP_n(Re^{\theta i})}\, Re^{\theta i}\, i d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n}} F(Re^{\theta i})\, e^{i\sum\limits_{k=0}^{n} a_k R^k \cos k\theta}\; e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k R^k \sin k\theta}\; Re^{i\theta}\, i d\theta.$$

Како е

$$\left| ie^{i\theta}\, e^{i\sum\limits_{k=0}^{n} a_k R^k \cos k\theta} \right| = 1,$$

ја имаме неедначквоста

$$\left| \int_G F_{(z)}\, e^{iP_n(z)}\, dz \right| < \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left| F(Re^{i\theta}) \right| e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k R^k \sin k\theta}\, R\, d\theta <$$

$$< R \cdot \underset{na\ G}{Max} \left| F(Re^{i\theta}) \right| \int_0^{\frac{\pi}{n}} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k R^k \sin k\theta}\, d\theta .$$

Како е по услов

$$\underset{na\ G}{Max} \left| F(Re^{i\theta}) \right| < AR^{n-2},\; R \longrightarrow \infty,\; n = 1,\; 2, \ldots ;$$

потребно е да покажеме дека интегралот

$$I_{(R)} = \int_0^{\frac{\pi}{n}} e^{-\sum a_k R^k \sin k\theta}\, d\theta$$

тежи кон нула со брзина поголема од таа на R^{-n+1} кога $R \longrightarrow \infty$. Бидејќи броевите $\sin k\theta$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ се позитивни за секое θ меѓу 0 и $\frac{\pi}{n}$, и како броевите a_k се по услов позитивни, ја имаме следната мајоранта

$$I_{(R)} < \int_0^{\frac{\pi}{n}} e^{-a_n R^n \sin n\theta}\, d\theta,$$

којашто ја добиваме отфрлувајќи ги сите членови од сумата, освен првиот. Воведувајќи во последниот интеграл замена $n\theta = \varphi$. добиваме

$$\mathrm{I}_{(R)} < \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^{-a_n R^n \sin\varphi} \, d\varphi.$$

Како за интегралите од облик

$$\int_0^{\pi} f(\sin\varphi) \, d\varphi$$

важи равенството

$$\int_0^{\pi} f(\sin\varphi) \, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\varphi) \, d\varphi,$$

тоа ползувајќи го овој резултат добиваме

$$\mathrm{I}_{(R)} < \frac{2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a_n R^n \sin\varphi} \, d\varphi$$

Ако на последниот интеграл ја примениме неравенката (2) на Жордан, добиваме

$$\mathrm{I}_{(R)} < \frac{\Pi}{n a_n R^n} \left[1 - e^{-a_n R^n}\right].$$

Према тоа

$$\left| \int_G F_{(z)} \, e^{iP_n(z)} dz \right| < R \cdot \underset{\text{на } G}{Max} \left| F(Re^{i\theta}) \right| \cdot \frac{\pi}{n\, a_n R^n} \left[1 - e^{-a_n R^n}\right] <$$

$$< \frac{A\pi}{n a_n R} \left[1 - e^{-a_n R^n}\right] \longrightarrow O, \; R \longrightarrow \infty ;$$

што ја докажува лемата.

III. ПРИМЕНА. Лемата на Жордан (3) е очевидно содржана во нашата лема, бидејќи за $n = 1$

$$\left| F_{(z)} \right| < \frac{A}{R} \longrightarrow O, \; R \longrightarrow \infty$$

$$\text{и } e^{iPn(z)} \equiv e^{imz}, \; m > O ;$$

додека контурата е

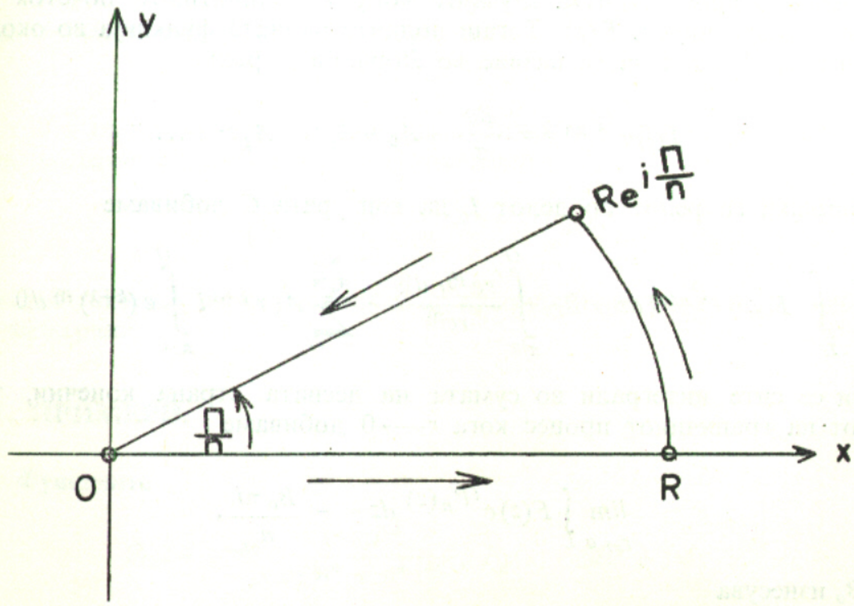
$$o \leqslant \arg z \leqslant \pi,$$

што и беа условите на лемата на Жордан. Меѓутоа, обратното не важи, како што ќе биде појаснето во примерот 6.

Докажаната лема може да се исползува многу широко при пресметувањето на нови класи опеделени интеграли од тип $\int_0^{\infty}$, или пак за обопштување на досега познатите случаи решливи по оваа метода и регистрирани во таблиците [3]. Избирајќи произволни функции $P_n(z)$ и $F(z)$ коишто ги задоволуваат условите $1° - 3°$ на воопштената лема и применувајќи ја теоремата на Cauchy за остатоците, како и докажаната лема, врху линискиот интеграл

$$\int_C F_{(z)}\, e^{\,iP_n(z)} dz$$

каде C е контура од сликата



добиваме, по изведениот граничен процес $R \longrightarrow \infty$ овој резултат

$$(6) \qquad \int_0^{+\infty}\left[F_{(x)}\, e^{\,iP_n(x)} - F\left(e^{\frac{\pi}{n}i}x\right) e^{\,iP_n\left(e^{\frac{\pi}{n}i}x\right)}\, e^{\frac{\pi}{n}i}\right] dx = 2\pi_i \sum B,$$

кадешто ΣB е збир на остатоците на функцијата $F_{(z)}\, e^{\,iP(z)}$ за оние полови кои се во контурата.

Условите на лемата (5) можат да се изменат во смисол на регуларноста. Зарад својата специфична положба на контурата на интеграцијата, точката $z = 0$ воопште не мора да биде регуларна за подинтегралната