функцијата. Точката $z=0$ може да биде пол или дури есенцијален сингуларитет (напр. логаритамска точка), но под услов интегалот

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{0} F(re^{i\theta})\, e^{iP_n(re^{\theta i})}\, re^{\theta i}\, i\, d\theta$$

земен по делот од кружната линија L којашто го заградува сингуларитетот $z=0$ од внатрешноста на контурата C

$$L: |z| = r,\ O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n},\ r < R;$$

да има определена и конечна гранична вредност кога $r \longrightarrow 0$.

Особено прост станува случајот кога координатниот почеток е пол од I ред за функцијата $F(z)$. Тогаш подинтегралната функција во околината на полот $z=0$ може да се развие во Лоранов — ред:

$$F_{(z)}\, e^{iP_{n(z)}} = \frac{Bo}{z} + A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

Интегрирајќи го редот по делот L на контурата C добиваме

$$\int_{L} F_{(z)}\, e^{iP_{n(z)}}\, dz = B_O \int_{\pi/n}^{O} \frac{re^{i\theta} i\, d\theta}{re^{i\theta}} + \sum_{k=O}^{\infty} A_k r^{k+1} i \int_{\pi/n}^{O} e^{(k+1)i\theta}\, d\theta$$

Бидејќи се сите интеграли во сумата на десната страна конечни, тоа во случајот на граничниот процес кога $r \longrightarrow 0$ добиваме

$$\lim_{r \to o} \int_{L} F(z)\, e^{iP_n(z)}\, dz = -\frac{B_o \pi i}{n},$$

каде B_o изнесува

$$B_o = \operatorname*{Res}_{z=o} \left\{ F_{(z)}\, e^{iP_{n(z)}} \right\}.$$

Така во случајот кога $z=0$ е пол од прв ред го добиваме резултатот

$$(7) \qquad \int_{O}^{+\infty} \left[F_{(x)}\, e^{iP_{n(x)}} - F\left(e^{\frac{\pi}{n} i}x\right) e^{iP_n\left(e^{\frac{\pi}{n} i}x\right)}\, e^{\frac{\pi}{n} i} \right] dx = 2\pi i\, \Sigma B + \frac{B_o \pi i}{n}$$

каде B_o ја има назначената вредност.

Последните формули (6) и (7) можат многу полезно да се употебат за пресметнување на нови класи определени интеграли ,коишто претставуваат разни поопштувања на некои класи интеграли регистрирани во [3]. Оваа метода на пресметување на определените несвојствени интегали од тип $\int_0^{+\infty}$ има таа предност што преку неа се пресметуваат интеграли кои можат да содржат многу параметри. Варирајќи ги тие параметри во позволените граници можат да се пресметаат многу различни определени интеграли ако само еднаш сме ги пресметале остатоците.

Може да се покаже дека функциите од облик

$$F(z) = \frac{R_l(z)}{Q_m(z)}\, z^\lambda e^{iae^{ibz}} \tag{8}$$

каде $R_l(z)$ и $Q_m(z)$ се полиноми од степени респективно l *i* m, за кои важи $l+1 < m$, $Q_m(z)$ нема реални нули ниту нули по зракот $\arg z = \frac{\pi}{n}$, каде λ е реален параметар подложен на условите

$$-1 < \lambda < m - (l+1)$$

и каде a и b се произволни реални ненегативни параметри, ги задоволуваат условите на лемата (5). Према тоа функцијата

$$f(z) = \frac{R_l(z)}{Q_m(z)}\, z^\lambda e^{iae^{ibz}} e^{iP_n(z)} \tag{9}$$

може многу полезно да се употреби за пресметување на нови класи определени интеграли.

IV. ПРИМЕРИ.

1- Функциите

$$F_{(z)} = e^{-bz} \frac{c + dz^4}{z(m^4 + n^4 z^4)}, \quad P_2(z) = az^2 + bz$$

чии параметри се подложени на условите

$$a > O,\ b \geqslant O,\ m > O,\ n \geqslant O;\ c, d \text{ произволни;}$$

ги задоволуваат условите на лемата (5) по контурата

$$O < r \leqslant |z| \leqslant R,\ O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

По пресметувањето на остатокот, од (7) се добива следниот определен интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} \sin(ax^2 + bx)}{x} \cdot \frac{c + dx^4}{m^4 + n^4 x^4}\, dx = \frac{\pi}{4m^4}\left[c - \frac{cn^4 - dm^4}{n^4} e^{-\frac{am^2}{n^2} - b\sqrt{2}\frac{m}{n}}\right].$$

Како подинтегралната функција содржи 6 параметра, тоа со варирање на тие параметри можат да се добијат различни интересни несвојствени интеграли, на пр.

$$1^\circ.\ c=d\ m=n;\quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}\sin(ax^2+bx)}{x}\,dx = \frac{\pi}{4};$$

$$2^\circ.\ b=O,\ m^4=n^4=d=-c;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\,\frac{\sin x}{x}\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}-e^{-a}\right];$$

$$3^\circ.\ a=O,\ d=-c,\ m^4=n^4;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-x^4}{1+x^4}\,\frac{e^{-bx}\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}\left[1-2e^{-b}\sqrt{2}\right];$$

$$4^\circ.\ a=O,\ d=O,\ m^4=n^4;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}\sin bx}{x}\,\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}\left[1-e^{-b}\sqrt{2}\right]$$

$$5^\circ.\ C=O,\ m^4=n^4;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}\,e^{-x}\sin(ax^2+bx)\,dx = \frac{\pi}{4}\,e^{-a-b}\sqrt{2}$$

$$6^\circ.\ c=o,\ n\longrightarrow o$$

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-bx}\sin(ax^2+bx)\,dx = O.$$

2. Функциите

$$F(z)=\frac{z^\lambda}{z^2+a^2},\quad P_1(z)=z$$

ги задоволуваат условите на лемата (5) по контурата

$$z=Re^{\theta i},\ z=re^{\theta i},\ O\leqslant\theta\leqslant\pi,\ O<r<a<R;$$

$$-R\leqslant x\leqslant -r,\ \text{и}\ r\leqslant x\leqslant R.$$

Се добиваат следните определени интеграли

$$\int_{o}^{+\infty} \frac{x^{\lambda}[\cos x + \cos(\lambda\pi - x)]}{x^2 + a^2}\, dx = \pi a^{\lambda-1} e^{-a} \cos\frac{\lambda\pi}{2};$$

$$\int_{o}^{+\infty} \frac{x^{\lambda}[\sin x + \sin(\lambda\pi - x)]}{x^2 + a^2}\, dx = \pi a^{\lambda-1} e^{-a} \sin\frac{\lambda\pi}{2};$$

$$-1 < \lambda < 2,\ a > O.$$

чии специјални случаи се:

$$\lambda = -\frac{1}{2}; \quad \int_{o}^{+\infty} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{x}\,(x^2+a^2)}\, dx = \frac{\pi e^{-a}}{a\sqrt{2a}};$$

$$\lambda = O; \quad \int_{o}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a};$$

$$\lambda = 1; \quad \int_{o}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

3. Функциите

$$F(z) = e^{-\sqrt{3}\,Bz}, \quad P_3(z) = Az^3 + Bz,\ A > O,\ B \geqslant O;$$

ги задоволуваат условите на лемата (5) по контурата

$$o \leqslant Re\{z\} \leqslant R,\ |z| = R,\ o \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{3},\ z = xe^{\frac{\pi i}{3}},\ O \leqslant x \leqslant R;$$

се добива следниот определен интеграл

$$\int_{o}^{+\infty} e^{-\sqrt{3}\,Bx} \cos\left(Ax^3 + Bx + \frac{\pi}{3}\right) dx = O.$$

4. Со интеграција на функциите

$$e^{-Bz^2}\, e^{i(Az^4 + Bz^2)};\ \frac{e^{-Bz^2}}{1+z^8}\, e^{i(Az^4 + Bz^2)}$$

по контурата

$$O \leqslant R_e\{z\} \leqslant R, |z| = R,\ O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4};\ z = xe^{\frac{\pi i}{4}}, O \leqslant x \leqslant R$$

добиваме респективно

$$\int_{o}^{+\infty} e^{-Bx^2} \sin\left(Ax^4 + Bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) dx = O;$$

и $$\int_{o}^{+\infty} \frac{e^{-Bx^2}}{1+x^8} \sin(Ax^4 + Bx^2 - \varphi_0)\, dx = -\frac{\pi e^{-A-B\sqrt{2}}}{8}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1).$$

5. Многубројни примери во врска со примената на обопштената лема на Жордан на пресметувањето на определените интеграли се дадени во [4].

6. Функцијата $e^{-z} \cdot e^{iz^3}$ ги задоволува условите на лемата (5) за $O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{3}$, т. е.

$$\int_{G} e^{-z} \cdot e^{iz^3} dz \longrightarrow O, \; z \longrightarrow \infty.$$

Ако се опитаме да го сведеме овој интеграл на тип (3), т. е. ако воведеме трасформација

$$W = z^3$$

тогаш областа D се пресликува во областа

$$O \leqslant \arg W \leqslant \pi$$

и интегралот станува

$$\int_{S} \frac{e^{-\sqrt[3]{w}}}{3\sqrt[3]{w^2}} e^{iw} dw$$

каде S е полукругот $|W| = R$, $O \leqslant \arg W \leqslant \pi$.

Но сега подинтегралната функција не ги исполнува условите (3) на лемата на Жордан, оти не е секаде ограничена (напр. по негативниот дел од X-оската), а на самата оска има и еден алгебарски сингуларитет. Тоа значи дека сите функции што ги задоволуваат условите (3) ги задоволуваат условите (5) но не сите функции со особини (5) се функции со особини (3). Докажаната генерализација е едно проширување на Жордановите аналитички функции.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Д. С. Митриновић: Важније неједнакости, Математичка библиотека 7, Београд 1958, стр. 50.

[2] В. И. Смирнов: Курс висшей математики, т. III, част II, издание седэмое, Москва 1958, п. 224.

[3] W. Gröbner und N. Hofreiter: Integraltafel, II teil, Bestimmte Integrale, Wien, 1961, dritte, verbesserte Auflage.

[4] Д. Димитровски: Примена рачуна остатака на израчунавање неких несвојствених интеграла, Изабрана поглавља из математике II, Математичка библиотека, књ. 22, стр. 61—70.

Dragan Dimitrovski

UNE GENERALISATION DU LEMME DE JORDAN ET SES APPLICATIONS

Résumé

L' auteur démontre le lemme suivant:

1° Soit F (z) une function analytique de la variable complexe z au contour et dans le domaine D donné par

$$O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n},$$

éxepté un nombre fini des pôles qui ne se trouvent pas au contour.

2° La fonction F (z) possède la popriété

$$|F(z)| < AR^{n-2},\ |z| = R \longrightarrow \infty$$

$$(A > O,\ n = 1,\ 2, \ldots).$$

3° Soit $P_n(z)$ un polynome de la variable complexe z qui a des coéficients réels positifs;

alors, avec $R \longrightarrow \infty$, on a

$$\int_G F(z)\, e^{iP_n(z)}\, dz \longrightarrow O,$$

où G présente un arc du cercle $|z| = R,\ O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n}$.

En utilisant le théoreme de Cauchy des résidus, le lemme démontré et le contour cité sur les fonctions du type (8), on peut évaluer un grand nombre des intègrales, non régistrées dans les tables.