Математички Билтен
15 (XLI)
1991 (41-48)
Скопје, Југославија

SUR LE MÈTHODE DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE DE LAPLACE APPLIQUÉE AUX ÉQUATIONS ARÉOLAIRES LINÉAIRES

Dragan Dimitrovski, Borko Ilievski, Miloje Rajović

L'équation aréolaire linéaire de second ordre (1) aux coéficients polynomiaux est résolue par l'emploi d'une mèthodologie qui présente une combinaison des mèthodes classiques de Riemann et Frobenius sur les équations différentielles ordinaires complèxes (11), et l'intégrale aréolaire de Laplace (3), avec les contours de Heinkel.

Dans les articles [1] et [2], suivant une analogie avec l'équation différentielle ordinaire de Laplace, on a défini l'équation aréolaire de Laplace, comme une équation aux dérivées conjuguées par $\overline{z}$: $\frac{\partial^k W}{\partial \overline{z}^k}$ d'une fonction $W(z,\overline{z})$ de deux variables complèxes. A ce sujet, on a introduit la notion de l'intégrale généralisée de Laplace, au domaine de deux variables complèxes indépendentes.

Dans l'article présent nous faisons un pas en avant et nous définissons une équation aréolaire de Laplace du second ordre avec les coèficients les polynômes aréolaires d'abord du troisième degrès par rapport à $\overline{z}$:

$$(a_0(z)\overline{z}^3+b_0(z)\overline{z}^2+c_0(z)\overline{z}+d_0(z))\frac{\partial^2 W}{\partial \overline{z}^2} + \\ + (a_1\overline{z}^3+b_1\overline{z}^2+c_1\overline{z}+d_1)\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} + (a_2\overline{z}^3+b_2\overline{z}^2+c_2\overline{z}+d_2)W = 0 \tag{1}$$

où $W(z,\overline{z})=U(x,y)+iV(x,y)$ présente une fonction complèxe inconnue; $a_k(z)$, $b_k(z)$, $c_k(z)$, $d_k(z)$, $k=0,1,2,3$ sont les fonctions analytiques données d'une variable complèxe z, définie dans une région $G_1(z)$ du plane des complèxes $z=x+iy$.

Une résolution réussite de l'équation (1) ouvrira un mèthode qui permetra le succés dans l'abord d'une généralisation à une équation aréolaire linéaire aux coèficients polynômiaux:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p_\nu} a_k(z)\bar{z}^k \right) \frac{\partial^\nu W}{\partial \bar{z}^\nu} = 0 \qquad (2)$$

ce qui aurait les conséquences multiples quant à la généralisation des fonctions spéciales, les séries de Taylor généralisées, la théorie des points singuliers dans le domaine des complèxes, etc.

Nous allons essayer de résoudre cette équation (1) au moyen du mèthode de l'intégrale définie, apres avoir défini l'intégrale aréolaire de Laplace:

$$\int_{\Gamma(\zeta)} e^{\bar{z}\zeta} \phi(\zeta,z)d\zeta \qquad (3)$$

ζ etant une variable complèxe: $\zeta=\xi+i\eta$, définie dans une région $G(\zeta)$ du ζ - plane des complèxes, dans laquelle est posé une ligne courbe de Jordan $\Gamma(\zeta)$; $z=x+iy$ étant une variable complèxe complètement indépendente, définie dans la region $G_1(z)$ d'un autre plan des complèxes, ayant $\bar{z}$ pour une variable conjuguée. $\phi(\zeta,z)$ étant une fonction de deux variables complèxes indépendentes, telle que l'intégrale (3) existe; dans un cas particulier une fonction continue.

Nous chercherons la solution de l'équation (1) sous la forme de l'intégrale (3), c'est à dire:

$$W(z,\bar{z}) = \int_{\Gamma(\zeta)} e^{\bar{z}\zeta} \phi(\zeta,z)d\zeta \qquad (4)$$

$\phi(\zeta,z)$ étant la fonction inconnue, $\Gamma(\zeta)$ étant un contour inconnu; on doit les déterminer tous les deux pour que (1) soit satisfaite. C'est le sens complet du méthode de l'intégrale définie.

Les dérivations de (4) étant accomplies, on les remplace dans (1), et après les calcules élémentaires, on a l'identité suivante ($\bar{z}$ étant indépendent de ζ):

$$\int_{\Gamma(\zeta)} \left[\bar{z}^3 P_2(\zeta,z)+\bar{z}^2 Q_2(\zeta,z)+\bar{z}R_2(\zeta,z)+S_2(\zeta,z)\right] e^{\bar{z}\zeta}\phi(\zeta,z)d\zeta = 0 \qquad (5)$$

avec

$$P_2(\zeta,z)=a_0(z)\zeta^2+a_1(z)\zeta+a_2(z); \quad R_2(\zeta,z)=c_0(z)\zeta^2+c_1(z)\zeta+c_2(z)$$

$$Q_2(\zeta,z)=b_0(z)\zeta^2+b_1(z)\zeta+b_2(z); \quad S_2(\zeta,z)=d_0(z)\zeta^2+d_1(z)\zeta+d_2(z)$$

ou

$$\int_{\Gamma(\zeta)} \left[A\zeta^2+B\zeta+C\right] e^{\overline{z}\zeta}\phi(\zeta,z)d\zeta \equiv 0 \tag{6}$$

A,B,C dépendant de $a_i(z)$, $b_i(z)$, $c_i(z)$, $d_i(z)$ et de $\overline{z}$. Après avoir effectuer trois intégrations par parties dans l'intégrale (5) (toujours prenant $dV = e^{\overline{z}\zeta}d\zeta$), on a

$$\begin{aligned} &\overline{z}^2\left[e^{\overline{z}\zeta}P_2\phi\right]/\Gamma(\zeta) + \overline{z}\{e^{\overline{z}\zeta}[Q_2\phi-(P_2'\phi+P_2\phi')]\}/\Gamma(\zeta) + \\ &+ \{e^{\overline{z}\zeta}[(P_2''\phi+2P_2'\phi'+P_2\phi'') - (Q_2'\phi+Q_2\phi') + (R_2\phi)]\}/\Gamma(\zeta) + \\ &+ \{\int_{\Gamma(\zeta)} e^{\overline{z}\zeta}[-(P_2'''\phi+3P_2''\phi'+3P_2'\phi''+P_2\phi''')+(Q_2''\phi+2Q_2'\phi'+Q_2\phi'') - \\ &- (R_2'\phi+R_2\phi') + (S_2\phi)]d\zeta\}/\Gamma(\zeta) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Pour que l'identité (7) soit empli pour tout $\overline{z}$, il faut que les conditions suffisantes soient remplies:

$$\Delta\left[e^{\overline{z}\zeta}P_2\phi\right]/\Gamma(\zeta) = 0 \tag{8}$$

$$\Delta\left[e^{\overline{z}\zeta}(Q_2\phi-(P_2\phi)'_\zeta)\right]/\Gamma(\zeta) = 0 \tag{9}$$

$$\Delta\{e^{\overline{z}\zeta}[(P_2\phi)''_\zeta-(Q_2\phi)'_\zeta+(R_2\phi)]\}/\Gamma(\zeta) = 0 \tag{10}$$

$$P_2\phi'''+(3P_2'-Q_2)\phi''+(3P_2''-2Q_2'+R_2)\phi'+(P_2'''-Q_2''+R_2'-S_2)\phi = 0 \tag{11}$$

ou Δ signifie le changement de la fonction citée au cas du parcour de la ligne corbe $\Gamma(\zeta)$. Les conditions (8), (9), (10) étant les conditions d'annulement (les conditions aux limites), la condition (11) présente une équation différentielle pour déterminer la fonction inconnue $\phi(\zeta,z)$, au lieu de $W(,z,\overline{z})$, aux coeficients polynômiaux, completement déterminés par les coèficients a_i, b_i, c_i, d_i de l'équation (1) donnée:

$$[a_0(z)\zeta^2+a_1(z)\zeta+a_2(z)]\phi'''(\zeta z)+[b_0\zeta^2+(6a_0-b_1)\zeta+3a_1-b_2]\phi'' + \\ + [c_0\zeta^2+(c_1-4b_0)\zeta+c_2-2b_1+6a_0]\phi'+[-d_0\zeta^2+(2c_0-d_1)\zeta+c_1-d_2-2b_0]\phi = 0 \qquad (11)$$

C'est une équation différentielle ordinaire complèxe par rapport à une fonction inconnue complèxe $\phi(\zeta)$, à une variable indépendente complèxe ζ, avec un parametre indépendent complèxe z; aux coèficients polynômiaux étant les polynômes du II ordre de ζ, aux coèficients aussi dépendants du même parametre complèxe z, indépendent de ζ.

Si l'on résout l'équation (11), on aura une solution $\phi(\zeta,z)$. Apres avoir remplacé cette $\phi(\zeta,z)$ dans (8), (9) et (10), on aura assez de liberté pour déterminer $\Gamma(\zeta)$, qui est complètement arbitraire. Il est évident que le problème essentiel dans la solution de l'équation aréolaire (1) est la résolution de l'équation complèxe (11), que nous nomerons à cette cause une équation résolvante associée à l'équation (1). Les P_2, Q_2, R_2 étant les fonctions entières (auxquelles n'influencent pas les singularités par rapport à z des fonctions analytiques $a_i(z)$, $b_i(z)$, $c_i(z)$, $d_i(z)$, l'élection de $\Gamma(\zeta)$ dépendra en général de la nature de $\phi(\zeta)$ et de ses singularités. Si les singularités de $\phi(\zeta,z)$ sont les pôles, alors le parcour autour le contour $\Gamma(\zeta)$ donne

$$\Delta = 2\pi i \sum_{\zeta} \mathrm{Res}(e^{\bar{z}\zeta}\cdot P_n\cdot\phi)$$

Si ϕ possede dans $\Gamma(\zeta)$ les singularités critiques, alors on a nécessairement $\Delta\neq 0$. Suivant le théorie de Riemann, généralement valable sur les équations (11), on a que les points singuliers des solutions $\phi(\zeta,z)$ sont les zéros du premier coèficient:

$$A_3(\zeta,z) = a_0(z)\zeta^2 + a_1(z)\zeta + a_2(z) = 0.$$

Ce sont les points isolés et l'on a

$$A_3(\zeta,z) \equiv a_0(z)(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)$$

ainsi que (11) a les singularités qui sont les pôles du premier ordre. Prenons une singularité ζ_1. L'équation (12) est écrite alors sous la forme

$$\phi''' + \frac{p_1(\zeta,z)}{\zeta-\zeta_1}\phi'' + \frac{q_1(\zeta,z)}{\zeta-\zeta_1}\phi' + \frac{r_1(\zeta,z)}{\zeta-\zeta_1}\phi = 0 \qquad (12)$$

les coeficients $p_1(\zeta,z)$, $q_1(\zeta,z)$, $r_1(\zeta,z)$ étant <u>entières</u> par rapport à ζ:

$$p_1(\zeta) = A_0+A_1(\zeta-\zeta_1)+A_2(\zeta-\zeta_1)^2 +\ldots$$

$$q_1(\zeta) = B_0+B_1(\zeta-\zeta_1)+B_2(\zeta-\zeta_1)^2 +\ldots$$

$$r_1(\zeta) = D_0+D_1(\zeta-\zeta_1)+D_2(\zeta-\zeta_1)^2 +\ldots$$

Comme l'on le sait à partir de <u>la théorie de Rieman et Frobenius des équations différentielles du domaine complèxe</u>, l'équation (13) a nécessairement les solutions dans la forme d'une <u>série potentielle généralisée</u>

$$(\zeta) = (\zeta-\zeta_1)^{\rho} \sum_{k=0}^{+\infty} C_k(\zeta-\zeta_1)^k \qquad (13)$$

l'exponent complèxe ρ étant une solution de <u>l'équation algèbrique caractéristique</u> du troisième degrés, dont le procédé est du à Riemann et Frobenius. Cette équation ayant les trois solutions différentes, on aura trois solutions distincts et séparées pour la fonction $\phi(\zeta)$.

$$\phi_1 = (\zeta-\zeta_1)^{\rho_1^1}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(1)}(\zeta-\zeta_1)^k = \phi_1(\zeta,\zeta_1;z)$$

$$\phi_2 = (\zeta-\zeta_1)^{\rho_2^1}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(2)}(\zeta-\zeta_1)^k = \phi_2(\zeta,\zeta_1;z) \qquad (14)$$

$$\phi_3 = (\zeta-\zeta_1)^{\rho_3^1}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(3)}(\zeta-\zeta_1)^k = \phi_3(\zeta,\zeta_1;z)$$

Ainsi que la solution générale de l'équation (11) au voisinage de ζ_1 est

$$\phi(\zeta,z)=C_1(z)\phi_1(\zeta,\zeta_1,z)+C_2(z)\phi_2(\zeta,\zeta_1,z)+C_3(z)\phi_3(\zeta,\zeta_1,z) \qquad (15)$$

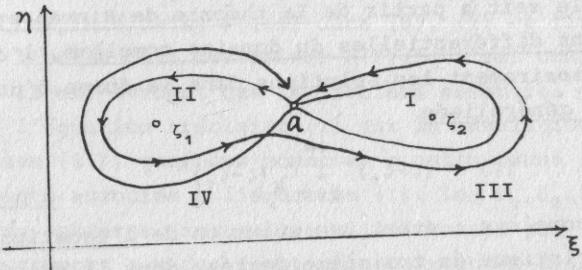
la convergeance des séries étant garantée dans la bague:

$$0 < |\zeta - \zeta_1| < |\zeta_2 - \zeta_1|$$

Il en sera de même dans le voisinage de l'autre point singulier ζ_2:

$$\phi^*(\zeta,z) = C_1^*(z)\phi_1^*(\zeta,\zeta_2,z)+C_2^*(z)\phi_2^*(\zeta,\zeta_2,z)+C_3^*\phi_3(\zeta,\zeta_2,z) \qquad (16)$$

$\phi(\zeta)$ étant déterminée de cette façon, il faut déterminer le contour $\Gamma(\zeta)$. Les ζ_1 et ζ_2 étant les points régulier - singuliers, le parcour de $\Gamma(\zeta)$ donne $\Delta \neq 0$ de l'argument, ce qu'il faut néutraliser. On effectue cela au moyen d'un <u>contour de Heinkel</u>, dont le double parcour abolit les Δ_1 et Δ_2 dues à ζ_1 et à ζ_2:



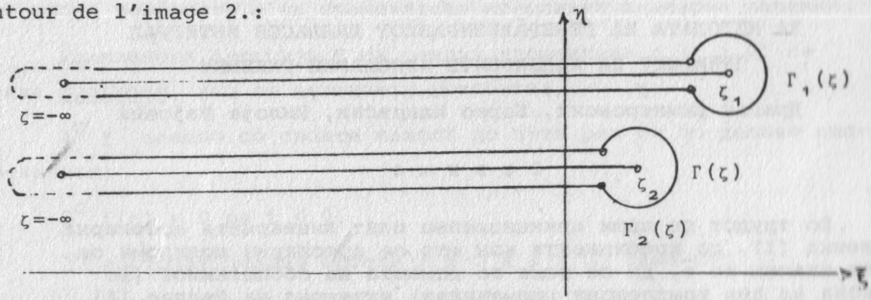
Quant à la solution générale de l'équation aréolaire (1), il faut accentuer que cette question n'est pas résolue d'une manière satisfaisante dans la litterature la plus citée [3], [4], [5]. Il s'agit du fait que l'on trouve par le procédé que nous proposons un nombre des solutions particulières qui n'est pas lié avec le rang <u>n</u> de l'équation (1). Cela dépendra généralement des conditions (8)-(11); parmis cettes solutions il y aura des telles qui sont linéairement dépendentes. (C'est le même avec les intégrales de Laplace de l'équation de Laplace ordinaire du domaine des réels). En tout cas les solutions particulieres et la solution générale de l'équation aréolaire (1) peut être cherchées dans la combinaison des intégrales de Laplace généralisées:

$$W(z,\overline{z}) = \int_{\Gamma_1(\zeta)=I+III} e^{\overline{z}\zeta}[C_1(z)\phi_1(\zeta,z)+C_2\phi_2(\zeta,z)+C_3\phi_3(\zeta,z)]d\zeta \; + \tag{17}$$

$$+ \int_{\Gamma_2(\zeta)=II+IV} e^{\overline{z}\zeta}[C_1^*(z)\phi_1^*(\zeta,z)+C_2^*\phi_2^*(\zeta,z)+C_3^*\phi_3^*(\zeta,z)]d\zeta$$

les "constantes" $C_i(z)$, $C_i^*(z)$ étant les fonctions analytiques de z arbitraires. On peut vérifier sans difficultés que tous les trois conditions (8), (9) et (10) sont emplies dans ce cas.

Dans quelques cas particulieres importants, il est nécessaire d'inclure dans la solution le point infini $\zeta=-\mathrm{Re}\{z\}=-\infty$; par exemple si l'on veut avoir pour la représentation de la solution une intégrale réelle impropre, comme dans le cas des transformations intègrales. Alors on peut élire pour $\Gamma(\zeta)$ le contour de l'image 2.:



On a dans ce cas particulier la solution (éventuellement générale) de (1)

$$W(z,\overline{z}) = {}_{\Gamma_1}\int_{-\infty}^{\zeta_1} e^{\overline{z}\zeta}[C_1\phi_1+C_2\phi_2+C_3\phi_3]d\zeta \tag{18}$$

ou

$$W(z,\overline{z}) = {}_{\Gamma_1}\int_{-\infty}^{\zeta_1} e^{\overline{z}\zeta}\Big(\sum_{k=1}^{3} C_k\phi_k\Big)d\zeta + {}_{\Gamma_2}\int_{-\infty}^{\zeta_2} e^{\overline{z}\zeta}\Big(\sum_{k=1}^{3} C_k^*\phi_k^*\Big)d\zeta$$

Γ_1 et Γ_2 étant les coupures de l'image.

L I T T E R A T U R E

[1] Dimitrovski D.: Sur quelques équations différentielles linéaires aréolaires spéciales du II ordre, Matem. Vesnik SR Srbije, 38(1986), 417-424

[2] Dimitrovski D., Ilievski B.: L'équation différentielle aréolaire de Laplace, et sur la possibilité de l'introduction des transformations de Laplace aréolaires, Matem. radovi Kosova, No 1 (1986), 17-25

[3] Uiteker, Votson: Kurs sovremennovo analiza, T. II, Moskva, 1968

[4] Olver F.: Vvedenie v asimptotičeskie metodi i specialjnie funkcii, per. s angl., Moskva 1978, Acad. Press N.Y., London 1974

[5] Smirnov V.I.: Kurs viššej matematiki, Tom III/2

ЗА МЕТОДАТА НА ГЕНЕРАЛИЗИРАНИОТ ЛАПЛАСОВ ИНТЕГРАЛ ПРИМЕНЕТ НА ЛИНЕАРНИТЕ АРЕОЛАРНИ РАВЕНКИ

Драган Димитровски, Борко Илиевски, Милоје Рајовиќ

Р е з и м е

Во трудот се врши принципиелен опит линеарната ареоларна равенка (1), со коефициенти кои што се ареоларни полиноми од трет степен по $\bar{z}$, да се реши со помошта на обопштениот (во смисла на две комплексни променливи) интеграл на Лаплас (4), ослонувајќи се врз аналогии од реалната област, како и со интегралот на Лаплас од една комплексна променлива ([1], [2]), каде со помошта на интегралот на Лаплас понекогаш може да се најде и општото решение. Методата на парцијална интеграција (4) дава некои прилично општи доволни услови (8), (9) и (10) кога тоа може да се постигне. При тоа битна е обичната комплексна диференцијална равенка (11), која што ја викаме резолвентна за истиот проблем. Ако истата ја сметаме за решена врз основа на теоријата на Риман-Вајерштрас-Фробениус со редот (13), тогаш решението на ареоларната равенка (1) е во принцип дадено низ Лапласовиот интеграл (17) или (18), каде Г е една Хајнкелова Контура.