ЕДЕН НЕПОСРЕДЕН ДОКАЗ НА ЕДНА ТЕОРЕМА ОД ОБЛАСТА НА НЕСВОЈСТВЕНИТЕ ИНТЕГРАЛИ ОД НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ

ДРАГАН ДИМИТРОВСКИ

Вообичаено е аналитичка функција да се дефинира на еден од познатите четири различни начина, меѓу себе еквивалентни. Така теоријата на аналитичките функции може да се развива по четири паралелни патишта. И ден денес се работи на изнаоѓањето врски меѓу четирите развои, во смисол на минималноста.

Дури во најскоро време е покажано (Connel E. H.: On properties of analytic functions, Duke Mathematical Jornal, 1961, 73—81; Plunkett, Rhobert L.: A topological proof of the derivate of a function of a complex variable, Bull. Amer. Math. Soc., 65, 1959, 1—4.) со помош само на диференцијалното сметање на фунции од комплексна променлива, да е извод на една аналитичка функција пак аналитичка функција во истата област. Иако изминаа повеќе од сто години интензивен развиток на теоријата на аналитичките функции, уште од времето на Cauchy овој основен став се докажуваше преку интегралното сметање. Благодарение на овој наод многу теореми од областа на диференцијалното сметање на функции од комплексна променлива можат да бидат докажани на нов начин, независен од интегралното сметање.

Во оваа нота ние ќе дадеме еден доказ на основната теорема за егзистенцијата на несвојствените интеграли од непрекинати функции, кој што доказ нема да ги користи Cauchy-евите интегрални теореми, туку само дефиницијата на аналитична функција со помош на Cauchy—Riemman-овите услови, и поимот на комплексен интеграл. Така и овде употребата на комплексен интеграл е сведена на најмала можна мера.

Позната е следната теорема:

Нека е

1° $F(z)$ аналитична функција во аголот

$$0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha \qquad (0 < \alpha \leqslant 2\pi),$$

2° Нека важи

$$\lim_{z \to \infty} z\, f(z) = 0, \tag{1}$$

3° Несвојствениот реален интеграл

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \tag{2}$$

нека постои.

Тогаш интегралот

$$\int_L f(z)\,dz \tag{3}$$

каде што L е зракот $z = Re^{i\alpha}$, $0 \leqslant R < \infty$ исто така постои и е еднаков на реалниот интеграл (2).

Горната теорема е тривијална последица на Cauchy-евата основна теорема да е интегралот од секоја аналитичка функција по затворена контура равен на нула.

Меѓутоа, како доказот на самата Cauchy-ева теорема е доста комплициран, сметаме дека ќе биде од интерес да дадеме еден непосреден доказ на горниот став, формулиран во нешто поопшт облик.

Теорема.

Нека е

1° $f(z)$ аналитичка функција во областа

$$\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2 \quad (0 \leqslant \theta_i \leqslant 2\pi, \; i = 1,2) \tag{4}$$

со исклучок на конечен број сингуларни точки на конечна далечина од кои ни една не лежи на еден од зраците $\arg z = \theta_1$ и $\arg z = \theta_2$.

2° Нека важи

$$\int_C f(z)\,dz \to 0, \qquad z \to \infty \tag{5}$$

каде C е лак од кругот $|z| = R$, определен со (4).

Тогаш постојат несвојствените интеграли кои се реален и имагинарен дел од интегралот

$$\int_0^{+\infty} \left\{ f(R,\theta_1)e^{\theta_1 i} - f(R,\theta_2)\,e^{\theta_2 i} \right\} dR \tag{6}$$

каде $f(R, \theta)$ значи $f(z)$ во поларни координати.

Доказ. Нека важи 1° и 2°. Тогаш од 1° следува да за $|z| = R$ доволно големо во секоја точка од лакот C за $f(z)$ се исполнети Cauchy—Riemann-овите услови

$$(7) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

а од 2° следува

$$\int_C (u+iv)\,(dx+idy) \to 0, \ z \to \infty;$$

што е еквивалентно со условите

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\int_C u\,dx - v\,dy \to 0, \quad \sqrt{x^2+y^2} \to \infty; \\ &\int_C v\,dx + u\,dy \to 0, \quad \sqrt{x^2+y^2} \to \infty. \end{aligned}$$

Ако сега условите (8) ги преведеме во поларни координати, добиваме:

$$(9) \qquad \begin{aligned} F(R) &= -R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big[u(R, \ \theta)\sin\theta + v(R, \ \theta)\cos \Big] d\theta \to 0, R \to \infty, \\ G(R) &= R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big[u(R, \ \theta)\cos\theta - v(R, \ \theta)\sin \Big] d\theta \to 0, \ R \to \infty. \end{aligned}$$

Како е по услов 1° $f(z)$ аналитична функција, тоа се функциите $u(R, \theta)$ i $v(R, \theta)$ непрекинати по R и θ, заедно со свои први парцијални изводи, па затоа во $F(R)$ и $G(R)$ е позволено диференцирање под знак на интеграл:

$$F'(R) = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big[u(R, \theta)\sin\theta + v(R, \theta)\cos\theta \Big] d\theta - R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big[\frac{\partial u}{\partial R}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial R}\cos\theta \Big] d\theta;$$

$$G'(R) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big[u(R, \theta)\cos\theta - v(R, \theta)\sin\theta \Big] d\theta + R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big[\frac{\partial u}{\partial R}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial R}\sin\theta \Big] d\theta.$$

Ако овде ги замениме Cauchy—Riemman-овите услови во поларни координати

$$(10) \qquad \frac{\partial u}{\partial R} = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial v}{\partial R} = -\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

добиваме по кусо пресметување;

$$F'(R) = \cos\theta_2\, u(R, \theta_2) - \sin\theta_2\, v(R, \theta_2) - \cos\theta_1\, u(R, \theta_1) + \sin\theta_1\, v(R, \theta_1);$$

(11) и на исти оачин

$$G'(R) = \cos\theta_2\, v(R, \theta_2) + \sin\theta_2\, u(R, \theta_2) - \cos\theta_1\, v(R, \theta_1) - \sin\theta_1\, u(R, \theta_1).$$

Од каде со интегрирање по R добиваме изрази за $F(R)$ и $G(R)$. Како по услов важи

$$\lim_{R\to\infty} F(R) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{R\to\infty} G(R) = 0,$$

следува дека постојат несвојствените интеграли:

(12)

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \Big[\cos\theta_2\, u(R, \theta_2) - \sin\theta_2\, v(R, \theta_2) - \cos\theta_1\, u(R, \theta_1) + \sin\theta_1\, v(R, \theta_1)\Big]\, dR = C_1,$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \Big[\cos\theta_2\, v(R, \theta_2) + \sin\theta_2\, u(R, \theta_2) - \cos\theta_1\, v(R, \theta_1) - \sin\theta_1\, u(R, \theta_1)\Big]\, dR = C_2.$$

Ако формираме комбинацнја од овој реален и имагинарен дел на некој несвојствен комплексен интеграл, добиваме

$$F(R) + i\, G(R) = \int_0^R \Big[e^{i\theta_2} f(R, \theta_2) - e^{i\theta_1} f(R, \theta_1)\Big]\, dR. \tag{13}$$

Како важи (12), тоа следува

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \Big[f(R, \theta_2)\, e^{i\theta_2} - f(R, \theta_1)\, e^{i\theta_1}\Big]\, dR = C_1 + i\, C_2$$

т. е. последниот комплексен несвојствен интеграл постои, со што е докажана теоремата.

Доказот во овој случај е независен од Cauchy-евата основна теорема да е интегралот од аналитична функција по затворена контура еднаков на нула. Овде се допушта функцијата во внатрешноста како и во надворешноста на затворената контура да има и сингуларитети.

Ако сега допуштиме да постои

$$\int_0^{+\infty} f(R, \theta_1)\, e^{i\theta_1}\, dR$$

тогаш од последното равенство следува дека постои и

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R f(R, \theta_2)\, e^{i\theta_2}\, dR$$

и тој интеграл изнесува

$$\int_0^{+\infty} f(R, \theta_2)\, e^{i\theta_2}\, dR = C_1 + i\, C_2 + \int_0^{+\infty} f(R, \theta_1)\, e^{i\theta_1}\, dR,$$

т. е. интегралите по двата зрака постојат и меѓу себе се разликуваат за константа $C_1 + i\, C_2$ (во овој случај $2\pi i$ x збир на остатоците на $F(z)$ за сингуларитетите во контурата), а што може да се докаже по мало посложен пат со примена на Cauchy-евата теорема за остатоците.

Ставајќи во специјален случај $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$, или $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, добиваме познати теореми кои често се ползуваат за пресметување на реални несвојствени интеграли.

Dragan Dimitrovski

UNE DÉMONSTRATION IMMÉDIATE D'UN THÉORÈME SUR LES INTÉGRALES IMPROPRES

Résumé

A partir de la définition d'une fonction analytique par les relations de Cauchy—Riemman, et de la notion d'intégrale complexe, l'auteur démontre le théorème suivant se rapportant à la convergeance des intégrales impropres:

1° Soit $f(z)$ une fonction analytique dans la region

$$\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2 \quad (0 \leqslant \theta_i \leqslant 2\pi)$$

exclusion faite d'un nombre fini der points à distance finie dont nulle ne se trouve sur les rayons $\arg\ z = \theta_1$ et $\arg\ z = \theta_2$.

2° $f(z)$ juit de la propriété

$$\int_C f(z)\, dz \to 0, \quad z \to \infty$$

la ligne C étant déterminée par: $|z| = R, \quad \theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$.

Alors existent les deux intégrales impropres représentant respectivement les parties réelle et imaginaire de l'intégrale:

$$\int_0^{+\infty} \left\{ f(Re^{\theta_1 i})\, e^{\theta_1 i} - f\,(Re^{\theta_2 i})\, e^{\theta_1 i} \right\} dR$$

Ce théoreme d'ailleurs représente un corollaire du théorème de Cauchy sur les résidus. La démonstration ci—dessus est directe, n'employant pas le formalisme du calcul intégral complexe.