ЈЕДНА ПРИМЕДБА О ОДРЕЂИВАЊУ ПРИБЛИЖНИХ ВРЕДНОСТИ ДЕЦИМАЛНИХ БРОЈЕВА

ПЛАТОН ДИМИЋ

I

Када се рачуна са приближним вредностима децималних бројева, често се наилази на питања која су у вези са решењем следећег проблема:

„Нека је A некакав број са произвољним бројем децимала до кога се дошло у току израчунавања броја a, и о коме се зна да је $|a-A| \leqslant l$. Колико треба да буде l, ако се хоће да се на основу нађеног броја A, па ма какве да су његове цифре и ма колико да их има, може одредити: 1) известан број a_m' са m децимала, који има ту особину да је $a_m' - 10^{-m} \leqslant a \leqslant a_m' + 10^{-m}$; 2) известан број a_m'' са m децимала, који има ту особину да је $a_m'' \leqslant a < a_m'' + 10^{-m}$; и 3) известан број a_m''' са m децимала, који има ту особину да је $a_m''' - {}^1/_2 \cdot 10^{-m} \leqslant a < a_m''' + {}^1/_2 \cdot 10^{-m}$?“ [1]

---

[1]) Терминологија, која се код нас употребљава кад је реч о приближним вредностима децималних бројева, није уједначена. У употреби су изрази „приближна вредност броја a са m децимала“, „тачна вредност броја a са m децимала“, „тачна вредност броја a на m децимала“, „тачна вредност броја a до на m децимала“, „заокругљена вредност броја a на m децимала“, „скраћена вредност броја a на m децимала“, „приближна вредност броја a са несигурним m-тим децималом“, и слично, али се тим изразима на придаје свугде исти смисао. Стога у самом тексту овог чланка неће бити употребљени никаки нарочити назив за горе дефинисане вредности a_m', a_m'' и a_m''', иако би се можда с разлогом могли употребити следећи називи: за a_m' назив „приближна вредност броја a са несигурним m-тим децималом“; за a_m'' назив „скраћена вредност броја a на m децимала“ и за a_m''' назив „заокругљена вредност броја a на m децимала“. Ови називи биће употребљени само у примедбама.

Лако је увидети да се увек, када је дато a, може одредити и a_m', и a_m'', и a_m''', и да a_m' није једносмислено дефинисано, него да ће се за a_m' добити увек по две вредности које ће се међусобно разликовати за 10^{-m}. Из датих дефиниција произалази следеће: једна од приближних вредности броја a са несигурним m-тим децималом добија се ако се од броја a задржи само онај део, који се завршава са његовим m-тим децималом, а друга од тих вредности добија се ако се у првој од ових вредности цифра на месту m-тог децимала повећа за 1; скраћена вредност бреја a на m децимала добија се ако се од броја a задржи само онај део који се завршава са његовим m-

Међутим, иако наведени проблем има везе и са сасвим елементарним задацима из рачунања са приближним вредностима[2]), ми нисмо нигде успели да нађемо његово потпуно решење. Стога ће оно бити предмет ове примедбе.

II

Да бисмо одговорили на прво од постављених питања, доказаћемо следећу теорему:

„Потребан и довољан услов да би се на основу некакве приближне вредности A броја a, независно од тога какве су цифре броја A и колико их има, могла одредити горе дефинисана приближна вредност a_m' броја a јесте у томе да је $l = {}^1/_2 \cdot 10^{-m}$."

Докажимо најпре да је наведени услов довољан. И, заиста, ма колико децимала имао број A, и ма какве да су његове цифре, увек је могуће наћи известан број $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, који има то својство да се A налази у интервалу $[(k - {}^1/_2) \cdot 10^{-m}, (k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m})$. Но тада — с обзиром да је у овом случају по претпоставци $|a - A| \leqslant {}^1/_2 \cdot 10^{-m}$ — број a се мора налазити у интервалу $[(k-1) \cdot 10^{-m}, (k+1) \cdot 10^{-m})$, што значи да је $k \cdot 10^{-m} = a_m'$.

Али наведени услов је и потребан. Јер, ако се претпо-

тим децималом; и, напослетку, заокругљена вредност броја a на m децимала добија се кад се од броја a задржи само онај део који се завршава са његовим m-тим децималом, односно кад се цифра на месту последњег децимала у томе делу повећа за 1, и то према томе да ли је прва одбачена цифра мања од 5, или није мања од 5. Те приближне вредности су оне са којима се у математици најчешће оперише, па се зато и задржавамо на питању могућности њиховог одређивања.

Међутим, овде се не ради о томе да се на основу неке познате вредности a одреди његова приближна вредност са несигурним m-тим децималом a_m', односно његова скраћена вредност на m децимала a_m'', односно његова заокругљена вредност на m децимала a_m''', него се ради о одређивању приближних вредности a_m', a_m'', и a_m''' у случајевима када само a није познато, (што се при рачунању често догађа) него је позната само извесна приближна вредност A броја a, и горња граница l апсолутне вредности разлике $a - A$.

[2]) Тако, на пример, при састављању било каквих математичких таблица, ако се у исте уносе само приближне вредности неке функције за дате вредности аргумента, обично је потребно да ове унесене вредности буду „заокругљене на исти број (рецимо m) децимала", а то ће рећи да исте у односу на праве вредности те функције имају она својства, која има напред дефинисана приближна вредност a_m''' у односу на a. Догоди ли се пак да до поменутих вредности треба доћи путем развијања функција у редове, онда се конкретно поставља питање: какав треба да буде остатак реда, па да се на основу сваке од непосредно нађених приближних вредности дате функције, независно од тога колико ће и какве ће цифре оне имати кад се изразе као децимални бројеви, може одредити она одговарајућа приближна вредност, која је за састављање таблица потребна.

стави да се за A добио број облика $(k+{}^1/_2)\cdot 10^{-m}$ (где је $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), што ни по чему није искључено, онда се, за свако $|a-A|>{}^1/_2\cdot 10^{-m}$, неће знати да ли се a налази у интервалу $[(k-1)\cdot 10^{-m}, (k+1)\cdot 10^{-m}]$, или се налази изван овог интервала, тако да се неће моћи одредити ни a_m''.[3])

III

Затим, да бисмо одговорили на друго од постављених питања, доказаћемо следећу теорему:

„Не постоји никакав општи услов који би се могао поставити само у погледу горње границе апсолутне вредности разлике $a-A$, а који би био увек довољан да би се на основу сваког нађеног децималног броја A, који испуњава тај услов, па ма какве да су његове цифре и ма колико да их има, могла одредити напред дефинисана вредност a_m'' броја a. Значи, ма колико била блиска нађена вредност A броју a, ипак се може догодити да се на основу броја A не може одредити a_m''. Али ако је $l<{}^1/_2\cdot 10^{-m}$, онда постоји бар извесна вероватноћа да ће се на основу нађене вредности A моћи одредити a_m'', и та се вероватноћа може изразити обрасцем $v_m=1-2\,l\cdot 10^m$“.

Докажимо најпре први део ове теореме. Ради тога претпоставимо прво да се за A добио број са тачно m децимала (то јест да је $A=k\cdot 10^{-m}$, где је $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), што ни по чем није искључено, и на шта се увек може свести и случај када се за A добио број са мање од m децимала. Но тада, ма колико мало да је l, неће се знати да ли се a налази у интервалу $[(k-1)\cdot 10^{-m}, k\cdot 10^{-m}]$, или се налази у интервалу $[k\cdot 10^{-m}, (k+1)\cdot 10^{-m}]$, из чега следује да се у том случају неће моћи утврдити ни то да ли тражену вредност a_m'' претставља број $(k-1)\cdot 10^{-m}$, или ту вредност претставља број $k\cdot 10^{-m}$. Али то ће се догодити и у

---

[3]) На овом месту треба приметити да неиспуњеност услова $|a-A|\leqslant {}^1/_2\cdot 10^{-m}$ не искључује сваку могућност да се на основу броја A, па ма какве да су његове цифре и ма колико да их има, одреди a_m', и да до тога долази тек ако је $|a-A|>10^{-m}$. Јер, догоди ли се, наиме, да је $|a-A|>{}^1/_2\cdot 10^{-m}$, али да је истовремено и $|a-A|+|A-k\cdot 10^{-m}|\leqslant 10^{-m}$, број a се мора налазити у интервалу $[(k-1)\cdot 10^{-m}, (k+1)\cdot 10^{-m}]$, што значи да ће у том случају бити $k\cdot 10^{-m}=a_m'$. Међутим услов $|a-A|+|A-k\cdot 10^{-m}|\leqslant 10^{-m}$ не може бити испуњен ако је $|a-A|>10^{-m}$. И тако, у свему узев, треба разликовати три случаја: ако је $|a-A|\leqslant {}^1/_2\cdot 10^{-m}$, на основу броја A моћи се одредити a_m', па ма какве да су цифре броја A и ма колико да их има; 2) ако је ${}^1/_2\cdot 10^{-m}<|a-A|\leqslant 10^{-m}$, онда ће се на основу броја A моћи одредити a_m' само ако је истовремено испуњен и услов $|a-A|+|A-k\cdot 10^{-m}|\leqslant 10^{-m}$; и 3) ако је $|a-A|>10^{-m}$, онда се на основу броја A неће моћи одредити a_m', па ма какве да су цифре броја A и ма колико да их има.

свим оним случајевима у којима A има више од m децимала, ако се истовремено деси да се A нађе у неком интервалу $[k \cdot 10^{-m} - l,\ k \cdot 10^{-m} + l)$ (где је $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), (сл. 2) пошто се ни тада, чак и када је l произвољно мало, неће знати да ли се a налази у интервалу $((k-1) \cdot 10^{-m},\ k \cdot 10^{-m})$, или се налази у интервалу $[k \cdot 10^{-m},\ (k+1) \cdot 10^{-m})$, и да ли је, према томе, $a_m'' = (k-1) \cdot 10^{-m}$ или је $a_m'' = k \cdot 10^{-m}$. А како се са ограничењем величине l ови случајеви не искључују, то се увек може догодити да се на основу нађене вредности A не може одредити.

Што се пак тиче другог дела ове теореме, тај се део, после реченог, може доказати на следећи начин.

Нека нађени број A има произвољан број децимала, и нека су његове цифре какве било. У вези са тим бројем A увек је могуће наћи известан број $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, који има то својство да се A налази у интервалу $[(k - {}^1/_2) \cdot 10^{-m},\ (k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m})$. Дужина тог интервала је 10^{-m}.[4] Догоди ли се пак да се број A нађе истовремено и у неком интервалу $[k \cdot 10^{-m} - l,\ k \cdot 10^{-m} + l)$, који се и за $l < {}^1/_2 \cdot 10^{-m}$ налази у интервалу $[(k - {}^1/_2) \cdot 10^{-m},\ (k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m})$, тражени број a_m'', према напред реченом, неће се моћи одредити. Стога вероватноћа v_m', да се на основу нађеног броја A тражени број a_m'' неће моћи одредити, износи $2\,l / 10^{-m} = 2\,l \cdot 10^m$, а вероватноћа да ће се на основу нађеног броја A број a_m'' моћи одредити биће $v_m = 1 - 2 \cdot 10^m \cdot l$.[5]

IV

Најзад, да бисмо одговорили на треће од постављених питања, доказаћемо следећу теорему:

„Не постоји никакав општи услов који би се могао поставити само у погледу апсолутне вредности разлике $a - A$, а који би био увек довољан да би се на основу сваког нађеног децималног броја A, који испуњава тај услов, независно од тога какве су његове цифре и колико их има, могла одредити напред дефнисана приближна вредност a_m''' броја a. Значи, ма колико била блиска нађена вредност A броју a, може се догодити да се на основу нађеног броја A не може одредити a_m'''. Али ако је $l < {}^1/_2 \cdot 10^{-m}$, онда

---

[4]) Околност што су интервали, који су узети у обзир при овом рачунању, отворен и с десне стране у овом случају нема практичног значаја при одређивању њихове дужине.

[5]) Из наведеног види се уједно да ће за $l \geqslant {}^1/_2 \cdot 10^{-m}$ бити искључена свака могућност за одређивање приближне вредности a_m'' на основу нађене вредности A, па ма какве да су цифре броја A и ма колико да их има. Тај услов следује и отуда што, ако би било $l \geqslant {}^1/_2 \cdot 10^{-m}$, интервал $(A - l,\ A + l)$ не би могао ни за какво A бити обухваћен неким интервалом $[k \cdot 10^{-m}, (k+1) \cdot 10^{-m})$, а из тога опет следује да се у том случају уопште не би могло одредити a_m''.

постоји бар извесна вероватноћа да ће се на основу нађене вредности A моћи одредити a_m''', и та вероватноћа може се изразити обрасцем $v_m = 1 - 2\,l \cdot 10^m$."

Доказивање ове теореме биће аналогно ономе што је изложено у претходном одељку. Да докажемо најпре први део ове теореме. Ради тога претпоставимо прво да се за A добио број облика $(k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m}$ (где је $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), што ни по чем није искључено. Но тада, ма колико мало да је l, неће се знати да ли се a налази у интервалу $(k \cdot 10^{-m},\ (k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m})$, или се налази у интервалу $[(k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m},\ (k + 1) \cdot 10^{-m})$, услед чега се у том случају неће моћи утврдити ни то да ли је $a_m''' = k \cdot 10^{-m}$, или је $a_m''' = (k + 1) \cdot 10^{-m}$. Али ће до тога доћи и у свима оним случајевима, у којима A има произвољан број каквих било децимала, ако се деси да се A нађе у неком интервалу $[(k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m} - l,\ (k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m} + l)$, јер се ни тада — па чак и када је l произвољно мало — неће знати да ли се a налази у интервалу $(k \cdot 10^{-m},\ (k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m})$, или се налази у интервалу, $[(k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m},\ (k + 1) \cdot 10^{-m})$ па, према томе, ни да ли је $a_m''' = k \cdot 10^{-m}$, или је $a_m''' = (k + 1) \cdot 10^{-m}$. А како се са ограничењем величине l ови случајеви не искључују, то се увек може догодити да се на основу нађене вредности A не може одредити a_m'''.

Што се пак тиче другог дела ове теореме, тај се део, на основу реченог, може доказати на следећи начин.

Нека нађени број A има произвољан број децимала, и нека су његове цифре какве било. У вези са тим бројем A увек је могуће наћи известан број $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, који има то својство да се A налази у интервалу $[k \cdot 10^{-m},\ (k + 1) \cdot 10^{-m})$. Дужина тог интервала је 10^{-m} [6]. Догоди ли се пак да се број A нађе истовремено и у неком интервалу $[(k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m} - l,\ (k + {}^1/_2) \cdot 10^{-m} + l)$, који се за $l < {}^1/_2 \cdot 10^{-m}$ налази у интервалу $[k \cdot 10^{-m},\ (k + 1) \cdot 10^{-m})$, тражени број a_m''', према напред реченом, неће се моћи одредити. Стога вероватноћа v_m', да се на основу нађеног броја A тражени број a_m''' неће моћи одредити, износи $2\,l / 10^{-m} = 2\,l \cdot 10^m$, а вероватноћа да ће се на основу нађеног броја A моћи одредити тражени број a_m''' биће $v_m = 1 - 2\,l \cdot 10^m$.[7]

---

[6]) Видети примедбу 4.

[7]) Из наведеног види се уједно и то да ће за $l \geqq {}^1/_2 \cdot 10^{-m}$ бити искључена свака могућност да се на основу нађене вредности A одреди a_m''', па ма какве да су цифре броја A и ма колико да их има. То произалази и отуд што, ако би било $l \geqq {}^1/_2 \cdot 10^{-m}$, интервал $(A - l,\ A + l)$ не би се могао ни за какво A налазити у неком интервалу $[(k - {}^1/_2) \cdot 10^{-m},\ (k + {}^3/_2) \cdot 10^{-m})$, а из тога следује опет да се у том случају не би могло одредити ни a_m'''.

V

Стога, на основу свега претходног, може се дати следеће практично упутство за рад приликом одређивања појединих од напред дефинисаних приближних вредности броја a.

1) Ако се тражи приближна вредност a_m' броја a, треба пре свега поступити тако, како би се дошло до неког броја A, о коме се може тврдити да је $|a-A|={}^1/_2\cdot 10^{-m}$. Тада ће се у сваком случају моћи одредити тражена приближна вредност a_m', па ма какве да су цифре нађеног броја A и ма колико да их има. Али ако се при одређивању броја A не може постићи наведена тачност, онда треба покушати да се нађе бар такво A, које би задовољило услов $|a-A|\leqslant 10^{-m}$, с тим да $|a-A|$ буде по могућству што мање, јер, све док је овај услов испуњен, није искључено да ће се на основу броја A моћи одредити тражена вредност a_m'.

2) Ако се траже приближне вредности a_m'' и a_m''' броја a, онда пре свега треба испитати да ли постоји могућност да се дође до неког броја A, који би задовољавао услов $|a-A|<{}^1/_2\cdot 10^{-m}$. Тај услов мора свакако да буде испуњен, ако се хоће да не буде искључена свака могућност да се на основу броја A могу одредити тражене приближне вредности a_m'' и a_m''', а вероватноћа да ће те вредности моћи бити одређене на основу броја A повећава се са опадањем вредности l. За практичан рад може се препоручити да се по могућности пође од тога што би се одредило A тако, да буде $|a-A|\leqslant{}^1/_2\cdot 10^{-(m+1)}$, јер у том случају, према обрасцу $v=1-2\,l\cdot 10^m$, вероватноћа да ће се на основу нађеног броја A моћи одредити поменуте приближне вредности броја a износиће 9/10. Догоди ли се пак да се и поред тога на основу нађене вредности A не могу да одреде поменуте приближне вредности a_m'' и a_m''', онда, уколико је то могуће, тачност рачунања треба повећати, и у том повећавању ићи све дотле, док се не постигне оно што се жели.