НЕКИ ПРОБЛЕМИ ЗБИРЉИВОСТИ

Ранко Бојанић

1. Ако су низови $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ везани извесном линеарном релацијом и ако из $(V) \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ следи $(V) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ то ћемо симболички означавати са

$$(V) \lim y_n \longrightarrow (V) \lim x_n.$$

Специјално, $\lim y_n \longrightarrow \lim x_n$ значи да из конвергенције низа $\{y_n\}$ следи конвергенција низа $\{x_n\}$ ка истој граничној вредности.

Овде ћемо посматрати релацију

$$(1) \qquad y_n = cx_n + (1-c)\, x_{n-1}, \qquad (x_{-1} = 0)$$

где је $c \neq 0$ и $c \neq 1$. У том случају из (1) следи да је

$$(2) \qquad x_n = (1-\lambda) \sum_{\nu=0}^{n} \lambda^{n-\nu}\, y_\nu,$$

где је $\lambda = 1 - 1/c$.

За произвољно c из (1), тј. из

$$y_n - x_n = (c-1)\,(x_n - x_{n-1}),$$

непосредно следи да је за

$$(V) \lim y_n \longrightarrow (V) \lim x_n$$

потребно и довољно да низ $\{x_n\}$ задовољава услов конвергенције

$$(V) \lim (x_n - x_{n-1}) = 0.$$

У извесним случајевима међутим могу се добити овакви ставови Tauber-ове природе без икаквог услова конвергенције, али у том случају c није више произвољно. Ставове те врсте тзв. ставове Mercer-овог типа посматраћемо у овом раду. Најједноставнији такав став дао је G. Pólya [1]:

$$\textit{Ако је } R\{c\} > 1/2, \textit{ тада } \lim y_n \longrightarrow \lim x_n,$$

што непосредно следи из обрасца (2). Из истог обрасца следи, као што је то приметио С. Аљанчић, да

$$\textit{ако је } R\{c\} = 1/2, \textit{ тада } \lim y_n \longrightarrow (C, 1) \lim x_n.$$

Уколико се ради о збирљивости, сваки проблем овог типа може се очевидно помоћу обрасца (2) свести на проблем инклузије два поступка збирљивости. Служећи се тим методом В. Вучковић [2] је доказао следеће ставове за (N, p_n) и (A) збирљивост:

Став 1. *Ако је* $R\{c\} > 1/2$ *и ако је поступак* (N, p_n) *регуларан, тада*

$$(N, p_n) \lim y_n \longrightarrow (N, p_n) \lim x_n.$$

Став 2. *Ако је* $R\{c\} > 1/2$ *тада*

$$(A) \lim y_n \longrightarrow (A) \lim x_n.$$

Међутим, док је доказ става 2 доста једноставан, доказ става 1 за (N, p_n) збирљивост прилично је компликован и ослања се на једну лему о инклузији два регуларна Nörlund-ова поступка збирљивости.

Овде ћемо примењивати један једноставнији метод који се састоји у томе да се из релације (1) изведе аналогна релација за средине низова $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ дефинисане посматраним поступком збирљивости, помоћу које се дати проблем своди на познати проблем регуларности једног поступка збирљивости. У тачки **2** даћемо тим методом једноставније доказе ставова 1 и 2, а у тачки **3** доказаћемо сличне ставове за Euler-ову (E, q) и Borel-ову (B) збирљивост:

Став 3. *Ако је* q *реалан број* $\neq -1$ *и* $R\{c\} > 1/(2|q+1|)$, *тада*

$$(E, q) \lim y_n \longrightarrow (E, q) \lim x_n.$$

Став 4. *Ако је* $R\{c\} > 0$ *тада*

$$(B) \lim y_n \longrightarrow (B) \lim x_n.$$

Ако упоредимо ставове 3 и 4 са претходним, видећемо да су код проблема овог типа Euler-ов и Borel-ов поступак збирљивости утолико ефикаснији од Nörlund-овог или Abel-

овог што се њихово поље дејства простире лево од праве $R\{c\}=1/2$, док се (N, p_n) и (A) збирљивост у томе погледу не разликују од обичне конвергенције.

2. (i) *Доказ става 1.* Означимо са $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ Nörlund-ове средине низова $\{x_n\}$ и $\{\eta_n\}$ дефинисане обрасцем

$$\alpha_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu}\, a_\nu,$$

где је $P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu$, $p_0 > 0$, $p_\nu \geqslant 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Тада из (1) добијамо да је

$$P_n\, \eta_n = c\, P_n\, \xi_n + (1-c)\, P_{n-1}\, \xi_{n-1},$$

па је према (2)

$$\xi_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} t_{n\nu}\, \eta_\nu$$

где је

$$t_{n\nu} = \begin{cases} (1-\lambda)\, \lambda^{n-\nu} \dfrac{P_\nu}{P_n}, & \nu \leqslant n \\ 0, & \nu > n, \end{cases}$$

и где је $\lambda = 1 - 1/c$. Према томе остало је да покажемо да $\lim \eta_n \longrightarrow \lim \xi_n$ тј. да је поступак збирљивости дефинисан матрицом $\| t_{n\nu} \|$ регуларан ако је $|\lambda| < 1$ тј. $R\{c\} > 1/2$ и ако је поступак (N, p_n) регуларан, тј. ако $P_{n-1}/P_n \to 1$, $n \to \infty$. То међутим непосредно следи из

1° $\sum_{\nu=0}^{\infty} |t_{n\nu}| = |1-\lambda| \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda|^{n-\nu} \dfrac{P_\nu}{P_n} \leqslant \dfrac{|1-\lambda|}{1-|\lambda|}$;

2° $\lim_{n\to\infty} t_{n\nu} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$;

3° Нека је $n > N$. Тада је

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} t_{n\nu} - 1 \right| = \left| \lambda^{N-1} + (1-\lambda) \sum_{\nu=0}^{N} \lambda^\nu \left(\frac{P_{n-\nu}}{P_n} - 1 \right) + (1-\lambda) \sum_{\nu=N+1}^{n} \lambda^\nu \frac{P_{n-\nu}}{P_n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|^{N+1} + 2 \sum_{\nu=0}^{N} |\lambda|^\nu \left(1 - \frac{P_{n-\nu}}{P_n} \right) + 2 \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |\lambda|^\nu,$$

па је, с обзиром на регуларност Nörlund-овог поступка

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} t_{n\nu}-1\right| \leqslant |\lambda|^{N+1}+2\sum_{\nu=N+1}^{\infty}|\lambda|^{\nu}.$$

Како N можемо изабрати произвољно велико, то је

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} t_{n\nu}=1.$$

Тиме је став 1 доказан.

(ii) *Доказ става 2.* Код доказа овог става једина тешкоћа састоји се у томе да покажемо да из конвергенције реда.

$$\eta(t)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n \text{ за } |t|<1 \tag{3}$$

и $|\lambda|<1$, тј. $R\{c\}>1/2$ следи конвергенција реда

$$\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \text{ за } |t|<1. \tag{4}$$

У том случају, наиме, из (1) добијамо да је

$$\eta(t)=c\,\xi(t)+(1-c)\,t\,\xi(t),$$

тј.

$$\xi(t)=\frac{1}{c+(1-c)\,t}\,\eta(t),$$

а одавде непосредно следи

$$\lim_{t\to 1-0}(1-t)\,\eta(t)=\lim_{t\to 1-0}(1-t)\,\xi(t),$$

тј. став 2.

Како је по претпоставци полупречник конвергенције реда (3) једнак 1, то је

$$\limsup_{n\to\infty}|y_n|^{1/n}=1, \tag{5}$$

па је према томе довољно да покажемо да из (5) следи

$$\limsup_{n\to\infty}|x_n|^{1/n}\leqslant 1. \tag{6}$$

То је међутим једноставна последица обрасца (2), односно неједначине

$$|x_n| \leqslant |1-\lambda| \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda|^{\nu} \; |y_k| \leqslant \frac{|1-\lambda|}{1-|\lambda|} \; |y_k|,$$

где је $|y_k|$ највећи од бројева $|y_\nu|$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$. Ако наиме k остаје ограничено кад $n \to \infty$, тада из ове неједначине очевидно следи (6). Ако $k \to \infty$ кад $n \to \infty$, тада је $k/n \leqslant 1$, а у том случају (6) добијамо из

$$|x_n|^{1/n} \leqslant \left(\frac{|1-\lambda|}{1-|\lambda|}\right)^{1/n} (|y_k|^{1/k})^{k/n}.$$

Према томе, полупречник конвергенције реда (4) је $\geqslant 1$, а то је као што смо видели довољно за доказ става 2.

3. (i) *Доказ става 3.* Означимо са $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ Euler-ове средине низова $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ које су, као што је познато, дефинисане обрасцем

$$\alpha_n = \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} \; a_\nu,$$

где је $q \neq -1$. Из (1) следи да је

$$\eta_n - c\,\xi_n = \frac{1-c}{(q+1)^n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu+1} q^{n-1-\nu} \; x_\nu = t_n.$$

Како је

$$t_n - \frac{q}{q+1}\, t_{n-1} = \frac{1-c}{(q+1)^n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{\binom{n}{\nu+1} - \binom{n-1}{\nu+1}\right\} q^{n-1-\nu} \; x_\nu =$$

$$= \frac{1-c}{(q+1)^n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} q^{n-1-\nu} \; x_\nu =$$

$$= \frac{1-c}{q+1}\, \xi_{n-1},$$

то је

$$\eta_n - c\,\xi_n - \frac{q}{q+1}\,(\eta_{n-1} - c\,\xi_{n-1}) = \frac{1-c}{q+1}\, \xi_{n-1},$$

тј.

$$\xi_n - \left\{1 - \frac{1}{c\,(q+1)}\right\} \xi_{n-1} = \frac{1}{c}\, \eta_n - \frac{q}{c\,(q+1)}\, \eta_{n-1}.$$

Решавањем ове једначине по ξ_n добијамо да је

$$\xi_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_{n\nu}\, \eta_\nu,$$

где је

$$\tau_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{1}{c}\left(1-\dfrac{1}{c}\right)\dfrac{1}{q+1}\,\mu^{n-\nu-1}, & \nu \leqslant n-1, \\ \dfrac{1}{c}, & \nu = n, \\ 0, & \nu > n \end{cases}$$

и $\mu = 1 - 1/(c\,(q+1))$.

Помоћу овог обрасца можемо лако показати да из конвергенције низа $\{\eta_n\}$ следи конвергенција низа $\{\xi_n\}$, или, што је исто, да (E, q) збирљивост низа $\{y_n\}$ повлачи за собом (E, q) збирљивост низа $\{x_n\}$ ако је $|\mu| < 1$, тј. $R\{c\} > 1/(2\,|q+1|)$. Довољно је наиме да покажемо да је поступак дефинисан матрицом $\|\tau_{n\nu}\|$ регуларан, тј. да је

$$1^\circ \sum_{\nu=0}^{\infty} |\tau_{n\nu}| = \left|\frac{1}{c}\left(1-\frac{1}{c}\right)\right| \frac{1}{|q+1|}\sum_{\nu=0}^{n-1} |\mu|^{n-\nu-1} + \frac{1}{|c|} \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{c}\left(1-\frac{1}{c}\right)\right| \frac{1}{|q+1|}\,\frac{1}{1-|\mu|} + \frac{1}{|c|};$$

2° $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_{n\nu} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$

3° Како је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_{n\nu} = \frac{1}{c}\left(1-\frac{1}{c}\right)\frac{1}{q+1}\,\frac{1-\mu^n}{1-\mu} \quad \text{и} \quad \mu = 1 - 1/(c\,(q+1)),$$

то је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_{n\nu} = 1 - \mu^n\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

па је према томе

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_{n\nu} = 1,$$

а тиме је став 3 доказан.

(ii) *Доказ става 4.* Како је Borel-ова (B) средина дефинисана обрасцем

$$\alpha(t) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!},$$

то се доказ става 4 своди на то да покажемо да

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) \longrightarrow \lim_{t\to\infty} \xi(t) \quad \text{ако је } R\{c\} > 0.$$

Претходно је међутим потребно да покажемо, слично као код доказа става 2, да из конвергенције реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \frac{t^n}{n!} \quad \text{за } |t| < \infty \tag{7}$$

следи конвергенција реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!} \quad \text{за } |t| < \infty \tag{8}$$

или, што је исто, да из

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{y_n}{n!}\right|^{1/n} = 0, \tag{9}$$

што је еквивалентно са (7), следи

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_n}{n!}\right|^{1/n} = 0, \tag{10}$$

тј. (8). Да бисмо то показали, приметимо да је према (2)

$$\left|\frac{x_n}{n!}\right|^{1/n} \leqslant \left(\frac{|1-\lambda|}{1-|\lambda|}\right)^{1/n} \left(\left|\frac{y_k}{k!}\right|^{1/k}\right)^{k/n} \left(\frac{k!}{n!}\right)^{1/n},$$

где је $|y_k|$ највећи од бројева $|y_\nu|$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$. Одавде сличним резоновањем као код доказа става 2 може се закључити да из (9) следи (10).

Из (1) можемо сада лако извести одговарајућу релацију између (B) средина низова $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Овде је наиме

$$\eta(t) = c\,\xi(t) + (1-c)\, e^{-t} \int_0^t e^u\, \xi(u)\, du.$$

Ако ову једначину решимо по $\xi(t)$ добићемо да је

$$\xi(t) = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{c}\right) e^{-\frac{t}{c}} \int_0^t e^{\frac{u}{c}}\, \eta(u)\, du + \frac{1}{c}\, \eta(t).$$

Нека је $|\eta(t)-a|<\varepsilon$, $t>T$. Тада је

$$|\xi(t)-a|=$$

$$=\left|-a\left(1-\frac{1}{c}\right)e^{-\frac{t}{c}}+\frac{1}{c}\left(1-\frac{1}{c}\right)e^{-\frac{t}{c}}\left\{\int_0^T+\int_T^t\right\}e^{\frac{u}{c}}\{\eta(u)-a\}\,du+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c}\{\eta(t)-a\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|a\left(1-\frac{1}{c}\right)\right|e^{-\sigma t}+M\left|\frac{1}{c}\left(1-\frac{1}{c}\right)\right|e^{-\sigma t}\int_0^T e^{\sigma u}\,du+$$

$$+\varepsilon\left|\frac{1}{c}\left(1-\frac{1}{c}\right)\right|e^{-\sigma t}\int_T^t e^{\sigma u}\,du+\frac{\varepsilon}{|c|},$$

где је $\sigma=R\{1/c\}=2R\{c\}/|c|^2>0$, па је

$$\limsup_{t\to\infty}|\xi(t)-a|\leqslant\frac{\varepsilon}{\sigma}\left|\frac{1}{c}\left(1-\frac{1}{c}\right)\right|+\frac{\varepsilon}{|c|}$$

тј.

$$\lim_{t\to\infty}\xi(t)=a,$$

а тиме је став 4 доказан.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Polya—Szegö* — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I 3. Teil, Aufgabe 48, Berlin 1933.

[2] *V. Vučković* — Deux théorèmes de type Mercerien, *Publ. de l'Inst. Math.*, VIII, 53—58, (1955).

Résumé

QUELQUES PROBLÈMES DE SOMMATION

R. Bojanić

Soient $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites infinies liées par une relation linéaire. Nous écrirons

$$(V)\lim y_n \longrightarrow (V)\lim x_n$$

toutes les fois que $(V)\lim y_n=a$ entraîne $(V)\lim x_n=a$.

Nous considérons ici la relation

$$(1)\qquad y_n=cx_n+(1-c)\,x_{n-1},\quad (x_{-1}=0),$$

où $c \neq 0$ et $c \neq 1$. Dans ce cas de (1) résulte

$$x_n = (1-\lambda) \sum_{\nu=0}^{n} \lambda^{n-\nu} y_\nu, \tag{2}$$

où $\lambda = 1 - 1/c$.

Il est évident, d'après (1) que la condition de convergence

$$(V) \lim (x_n - x_{n-1}) = 0$$

est nécessaire et suffisante pour que la relation

$$(V) \lim y_n \longrightarrow (V) \lim x_n$$

ait lieu pour tout c.

Dans certains cas cependant, de pareils théorèmes de nature tauberienne peuvent être obtenus sans aucune condition supplémentaire de convergence, mais dans tous ces cas c ne peut plus être arbitraire. Ces théorèmes sont appelés théorèmes de type mercerien. G. Pólya [1] en a donné l'exemple le plus simple:

$$\lim y_n \longrightarrow \lim x_n \textit{ toutes les fois que } R\{c\} > 1/2,$$

ce qui est d'ailleurs une conséquence immédiate de (2). Si, au lieu de convergence, on considère un procédé de sommation, il est clair, d'après (2) que tout problème de ce type peut être réduit à un problème d'inclusion de deux procédés de sommation. Suivant cette méthode V. Vučković [2] a démontré récemment les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Si le procédé* (N, p_n) *est régulier, alors* $(N, p_n) \lim y_n \longrightarrow (N, p_n) \lim x_n$ *toutes les fois que* $R\{c\} > 1/2$.

Théorème 2

$$(A) \lim y_n \longrightarrow (A) \lim x_n \textit{ toutes les fois que } R\{c\} > 1/2.$$

Tandis que la démonstration du théorème 2 est assez simple, la démonstration du théorème 1, s'appuyant sur un théorème d'inclusion, est un peu laborieuse.

Nous appliquons ici une méthode de démonstration beaucoup plus simple que la précédente, où l'on déduit de (1) une relation analogue entre les moyennes des suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ définies par le procédé de sommation consideré, ce qui réduit le problème envisagé au problème bien connu de la régularité d'un procédé de sommation.

Suivant cette méthode nous avons donné en premier lieu, dans 2, les démonstrations simples des théorèmes 1 et 2. En second lieu, nous avons démontré dans 3 des théorèmes analogues pour les procédés d'Euler et de Borel.:

Théorème 3

$(E, q) \lim y_n \longrightarrow (E, q) \lim x_n$ *toutes les fois que* $R\{c\} > 1\ (2\,|q+1|)$, où q est réel et $\neq -1$;

Théorème 4

$$(B) \lim y_n \longrightarrow (B) \lim x_n \textit{ toutes les fois que } R\{c\} > 0.$$