Математички Билтен
20 (XX)
1996 (17–22)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ИНВЕРЗИБИЛНОСТ И КОНЕЧНОДИМЕНЗИОНАЛНОСТ ВО БАНАХОВНИ АЛГЕБРИ

Новак Ивановски * и Алекса Малчески *

Апстракт

Во оваа работа ќе бидат дадени четири варијанти на доказ на следниот став:

Ако A е конечно димензионална асоцијативна алгебра со единица $e \neq 0$ и A е Банахов простор, и ако $\dim A < \infty$ тогаш од $xy = e$ следува $yx = e$, (Рудин, У.: *Функциональний анализ*, Москва 1975, стр. 291). .

Да се потсетиме на дефиницијата на алгебра A: A е векторски простор и за секои x, $y \in A$ постои $xy \in A$ при што операцијата производ е асоцијативна и дистрибутивна и е исполнето

$$x(\alpha y) = \alpha(xy) = (\alpha x)y$$

за секои x, $y \in A$ и за секој скалар α.

Понатаму, за алгебрата A ќе велиме дека е нормирана ако A е нормиран векторски простор и е исполнето неравенството

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\| . \tag{1}$$

Нормирана алгебра A се нарекува Банахова алгебра ако A како нормиран векторски простор е Банахов простор.

Во [1] е докажана следната теорема:

Теорема 1. *Нека A е Банахов простор и истовремено комплексна алгебра со единица $e \neq 0$ во која што операциите множење од лево и десно се непрекинати. Тогаш во A постои норма што ја индуцира почетната топологија во однос на која што A претставува Банахова алгебра (го исполнува неравенството $(*)$).*

Се потсетуваме на доказот на оваа теорема. Се покажува дека $A \sim A^\wedge$ ($\sim$ е изометрички изоморфизам), каде што $A^\wedge \subseteq B(A)$ – алгебра од линеарни ограничени оператори.

I. Доказ. Нека $\dim A < \infty$. Тогаш $B(A) = L(A)$ просторот од линеарни оператори на A кој што е конечнодимензионален.

Нека $xy = e$, $x \to M_x$, $y \to M_y$, тогаш $M_x M_y = I$ идентичен оператори. Ако со истите букви ги означиме соодветните матрици па со примена на теорема на Бине–Коши се добива $\det M_x . \det M_y = 1$ следува дека $\det M_x \neq 0$, M_x е инверзибилна матрица (или да се примени теорема 9.5. од [2] стр. 222). Добиваме дека $M_y M_x = I$. Од изоморфизмот на пресликувањето $x \mapsto M_x$ се добива дека $yx = e$.

II. Доказ. Нека $\dim A < \infty$. Тогаш како и во доказот 1 нека $B(A) = L(A)$ – простор од линеарни ограничени оператори. Нека $xy = e$, $x \mapsto M_x = C$, $y \mapsto M_y = D$. Тогаш $CD = M_x M_y = I$ каде C и D се линеарни оператор во конечно димензионален векторски простор A. Ќе покажеме дека од условот $CD = I$, следува дека јадрото на операторот D е нула. Нека $Du = 0$. Тогаш е $CDu = C_0 = 0$, $u = CDu = 0$. Ќе покажеме дека сликата на D е еднаква на A. Нека $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ е база за A. Тогаш множеството од вектори $\{De_1, De_2, \ldots, De_n\}$ е линеарно независно. Навистина нека

$$\gamma_1 De_1 + \gamma_2 De_2 + \cdots + \gamma_n De_n = 0 \Rightarrow \gamma_1 CDe_1 + \gamma_2 CDe_2 + \cdots + \gamma_n CDe_n = 0$$

$$\Rightarrow \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \cdots + \gamma_n e_n = 0$$

од каде што заради линеарната независност на $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ се добива $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 0$.

III. Доказ. Нека $\dim A < \infty$, $xy = e$, и $e \neq x$. Тогаш векторите $\{e, x, x^2, \ldots, x^n\}$ се линеарно зависни. Постојат скалари $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (не сите еднакви на нула) така што

$$\alpha_0 e + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0\,. \tag{2}$$

Земаме случај кога $\alpha_0 \neq 0$. Ако равенството (1) го помножиме со y од десно се добива

$$\alpha_0 y + \alpha_1 e + \alpha_2 x_+ \cdots + \alpha_n x^{n-1} = 0$$

односно

$$\alpha_0 y + \alpha_1 e + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_n x^{n-1} = 0\,.$$

Оттука се добива

$$y = \frac{-[\alpha_1 e + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_n x^{n-1}]}{\alpha_0}\,.$$

Тогаш е:

$$yx = \frac{1}{\alpha_0} - [\alpha_1 e + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_n x^{n-1}]x =$$

$$= \frac{-[\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n]}{\alpha_0} = \frac{(\alpha_0 e)}{\alpha_0} = e\,.$$

Го разгледуваме случајот кога $\alpha_0 = 0$ Со k го означуваме најмалиот природен број s таков што $\alpha_s \neq 0$. Тогаш $k < n$ (бидејќи ако $k = n$ тогаш $\alpha_n x^n = 0$ и заради $\alpha_n \neq 0$ следува $x^n = 0$ множејќи го последното равенство n пати со y од десно се добива $e = 0$ што претставува контрадикција со претпоставката). Тогаш равенството (1) преминува во

$$\alpha_k x^k + \alpha_{k+1} x^{k+1} + \cdots + \alpha_n x^n = 0 \tag{3}$$

Множејќи го (3) $k+1$–пат со y од десно се добива

$$\alpha_k y + \alpha_{k+1} e + \cdots + \alpha_n x^{n-k-1} = 0\,. \tag{4}$$

Земајќи

$$y = \frac{-[\alpha_{k+1} e + \alpha_{k+2} x + \cdots + \alpha_n x^{n-k-1}]}{\alpha_k}$$

непосредно се проверува дека е

$$yx = e$$

со што доказот е завршен во потполност.

IV. Доказ. Ако $\dim A = n < \infty$ и $xy = e$, $y \neq 0$, векторите $\{e, y, y^2, \ldots, y^n\}$ се линеарно зависни, па постојат комплексни броеви $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ не сите еднакви на нула така што

$$\beta_0 e + \beta_1 y + \cdots + \beta_n y_n = 0 . \tag{5}$$

Земаме случај кога $\beta_0 \neq 0$. Ако равенството (5) се помножи од лево со x и имајќи предвид $xy = e$, $x0 = 0$ се добива:

$$\beta_0 x + \beta_1 e + \beta_2 y + \cdots + \beta_n y^{n-1} = 0 . \tag{6}$$

Множејќи го равенството (6) од лево со y се добива

$$\beta_0 yx + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \cdots + \beta_n y^k = 0 . \tag{7}$$

Со додавења и одземање на $\beta_0 e$ во равенството (7) се добива

$$\beta_0 yx - \beta_0 e + \beta_0 e + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \cdots + \beta_n y^k = 0$$

од каде заради (4) се добива

$$\beta_0 yx - \beta_0 e + 0 = 0$$

$$\beta_0 (yx - e) = 0$$

што повлекува $yx = e$ што требаше и да се докаже.

Посматраме случај кога $\beta_0 = 0$. Со p се означува најмалиот природен број s таков што $\beta_s \neq 0$. Тогаш $p < n$. Равенството (5) преминува во

$$\beta_p y^p + \beta_{p+1} y^{p+1} + \cdots + \beta_n y^n = 0 . \tag{8}$$

Ако (8) се помножи p–пати со x од лево се добива

$$\beta_p e + \beta_{p+1} y + \cdots + \beta_n y^{n-p} = 0 , \tag{9}$$

од каде со множење на (9) со x од лево се добива

$$\beta_p x + \beta_{p+1} e + \cdots + \beta_n y^{n-p-1} = 0 .$$

Ако се додаде и одземе $\beta_p e$ во последното равенство се добива

$$\beta_p yx - \beta_p e + \beta_p y + \beta_{p+1} y + \cdots + \beta_n y^{n-p} = 0$$

па од (9) се добива

$$\beta_p(yx - e) = 0$$

што повлекува $yx = e$ што требаше да се докаже.

Литература

[1] Рудин, У.: *Функциональний анализ*, Москва 1975.

[2] Рудин, У.: *Основи математического анализа*, Мир Москва, 1976.

[3] Kurepa, S.: *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

INVERTIBILITY AND FINITE DIMENSIONALITY IN BANACH ALGEBRAS

Novak Ivanovski * i Aleksa Malčeski *

Summary

In this paper we will give four variations of a proof of the following result.

It A is a finite dimensional Banach algebra with unit ($e \neq 0$) then $xy = e$ implies $yx = e$.

* Prirodno-matematički fakultet

p. fah 162,

91 000 Skopje,

Makedonija

** Mašinski fakultet

p. fah 464

91 000 Skopje,

Makedonija