Математички Билтен
20 (XX)
1996 (75–80)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ЗА РЕШАВАЊЕТО НА ЕДНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ВТОР РЕД

Димов А. Лазо

Апстракт

Природен е стремежот решавањето на диференцијална равенка со функционални коефициенти да се сведе на решавање на диференцијална равенка со константни коефициенти. Овде даваме еден прилог кон тој природен стремеж определувајќи услови при кои диференцијална равенка од втор ред, со функционални коефициенти, се сведува на диференцијална равенка со константни коефициенти. Воедно го определуваме и решението на диференцијалната равенка.

1. Имајќи ја во вид диференцијалната равенка

$$y'' - ay = 0\,, \qquad a = \text{конст} \tag{I}$$

кон чие решавање се сведуваат многу проблеми од физика и техника, а имајќи го во вид и нејзиното решение дадено со формулите:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\sqrt{a}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{a}\,x}\,, \quad \text{за} \quad a > 0 \\ y &= C_1 \sin\sqrt{-a}\,x + C_2 \cos\sqrt{-a}\,x\,, \quad \text{за} \quad a < 0 \end{aligned} \tag{II}$$

ние овде ќе докажеме дека решението на диференцијалната равенка

$$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = 0\,, \tag{1}$$

при определени услови може да се добие со слични формули. За таа цел, нека воведеме нова независно променлива величина t во равенката (1) со релацијата $x = x\,(t)$. При тоа добиваме:

$$\frac{f(t)}{x'^2\,(t)}y''\,(t) + \left[\frac{g\,(t)}{x'\,(t)} - \frac{f\,(t)x''\,(t)}{x'^3\,(t)}\right] y'\,(t) + h\,(t)y\,(t) = 0\,.$$

Нека претпоставиме дека $x = x\,(t)$ ги задоволува условите

$$\begin{aligned} x'^2\,(t) &= -\frac{Af\,(t)}{h\,(t)}\,, \quad A = \text{конст} \\ g\,(t)x'^2\,(t) &- f\,(t)x''(t) = 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Со елиминација на $x\,(t)$ од (2) добиваме дека функциите $f\,(x)$, $g\,(x)$, $h(x)$ го задоволуваат условот:

$$2g\,(x)h\,(x) = f'(x)h\,(x) - f\,(x)h'\,(x)\,. \tag{3}$$

При тоа самата функција $x = x\,(t)$ се добива од релацијата:

$$t = \int \sqrt{-\frac{h(x)}{Af(x)}}\,dx\,. \tag{4}$$

Со ова нешто практично ја докажавме следната

Теорема. *Диференцијалната равенка* (1), *со воведување на нова независно променлива величина* t *со релацијата* (4) *се трансформира во диференцијалната равенка*

$$y''(t) - Ay(t) = 0\,.$$

Сега имајќи во вид (I) и (II) за решението на диференцијалната равенка (1) добиваме:

$$y = C_1\,e^{\int \sqrt{-\frac{h(x)}{f(x)}}\,dx} + C_2\,e^{-\int \sqrt{-\frac{h(x)}{f(x)}}\,dx}, \quad \text{за } \frac{h(x)}{f(x)} < 0$$

или

$$y = C_1 \sin\left[\int \sqrt{\frac{h(x)}{f(x)}}\,dx\right] + C_2 \cos\left[\int \sqrt{\frac{h(x)}{f(x)}}\,dx\right] \quad \text{за } \frac{h(x)}{f(x)} > 0$$

2. Претходниот резултат може да се искористи за формирање на повеќе диференцијални равенки чии решенија може да се добијат со формулите (6).

Пример 1. За Лапласовата диференцијална равенка

$$(ax+b)y''+(cx+d)y'+(ex+f)y=0\,,$$

од условот (3) добиваме дека при $c=0$, $e=0$ и $a=2d$ односно равенката

$$(2ax+b)y''+ay'+cy=0\,,$$

со воведување нова независнопроменлива t со релацијата

$$t=\int\sqrt{-\frac{c}{A(ax+b)}}\,dx=\frac{2}{a}\sqrt{-Ac(ax+b)}\,,$$

се доведува во вид (5) па нејзиното решение може да се добие со формулите (6) во следниов вид:

$$\begin{aligned}y=&C_1\,{}^{\frac{2}{a}\sqrt{-c(ax+b)}}+C_2\,{}^{\frac{2}{a}\sqrt{-c(ax+b)}} &&\text{за}\;\; c(ax+b)<0\\ y=&C_1\,\sin\,\frac{2}{a}\sqrt{c(ax+b)}+C_2\,\sin\,\frac{2}{a}\sqrt{c(ax+b)}, &&\text{за}\;\; c(ax+b)>0\end{aligned}$$

Пример 2. За диференцијалната равенка со коефициенти полиноми од втор ред:

$$(ax^2+bx+c)y''+(a_1x^2+b_1x+c_1)y'+(a_2x^2+b_2x+c_2)y=0$$

заменувајќи ги соодветните $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ во условот (3) ги добиваме следните случаи за решливост на диференцијалната равенка:

2.1. За $a_1=a_2=b_2=0$, $b_1=a$, $2c_1=b$, односно диференцијалната равенка:

$$(ax^2+bx+c)y''+\left(ax+\frac{b}{2}\right)y'+c_1y=0\,.$$

2.2. За $a_1=a_2=0$, $b_1=\frac{a}{2}$, $b^2\geq 4ac$, $c_1=\frac{1}{4}\left[b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right]$ се добива диференцијалната равенка:

$$(ax^2+bx+c)y''+(\frac{a}{2}x+c_1)y'+k\left(\frac{a}{2}x+c_1\right)y=0\,.$$

2.3. За $a_1 = b_1 = 0$, $b^2 \geq 4ac$, $c_1 = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4ac}$, се добива диференцијалната равенка

$$(ax^2 + bx + c)y'' + c_1 y' + (a_2 x^2 + b_2 x + c_2)y = 0\,.$$

2.4. За $a_1 = b_1 = 0$, $b_2^2 = 4a_2c_2$, $c_1 \neq 0$ се добива диференцијалната равенка

$$(ax^2 + bx + c)y'' + c_1 y' + (a_2 x^2 + b_2 x + c_2)y = 0\,.$$

Пример 3. За диференцијалната равенка

$$[ae^{2x} + be^x + c]y'' + [a_1 e^{2x} + b_1 e^x + c_1]y' + [a_2 e^{2x} + b_2 e^x + c_2]y = 0\,,$$

од условот (3) се добиваат следните случаи кога таа ќе може да се реши со овде наведената смена на независно променливата.

3.1. За $a_1 = 0$, $c_1 = 0$, $4b_1^2 = b^2 - 4ac$, односно диференцијалната равенка

$$[ae^{2x} + be^x + c]y'' + b_1 e^x\, y' + [a_2 e^{2x} + b_2 e^x + c_2]y = 0\,.$$

3.2. За $a_1 = 0$, $c_2 = 0$, $b_2 = 0$, $c_1 = -c$, $2b_1 + b = 0$, односно диференцијалната равенка.

$$[ae^{2x} + be^x + c]y'' + \left[-\frac{b}{2}e^x - c\right] y' + a_2 e^{2x} y = 0\,.$$

3.3. За $a_2 = 0$, $c_1 = 0$, $b_2 = 0$, $a_1 = a$, $2b_1 - b = 0$, односно диференцијалната равенка.

$$[ae^{2x} + be^x + c]y'' + \left[ae^{2x} + \frac{b}{2}e^x\right] y' + c_2 y = 0\,.$$

3.4. За $a_2 = 0$, $c_1 = 0$, $2a_1 = a$, $4b_1^2 - 2b_1 b + ca = 0$, односно диференцијалната равенка

$$[ae^{2x} + be^x + c]y'' + \left[\frac{a}{2}e^x + b_1\right] y' + [b_2 e^x + c_2]y = 0\,.$$

3.5. За $a_2 = 0$, $c_2 = 0$, $b_1 = 0$, $2a_1 = a$, $2c_1 = -c$, односно диференцијалната равенка

$$[ae^{2x} + be^x + c]y'' + \left[\frac{a}{2}e^x - \frac{c}{2}\right] y' + b_2 e^x y = 0\,.$$

Литература

[1] Беркович Л.М.: *Преобразование обыкновеных линейных дифференциальных уравнений*, Учебное пособие, Куйбишев 1978.

[2] Rašajski B.: *Teorija običnih diferencijalnih jednačina*, Beograd 1970.

[3] Камке Е.: *Справочник по обькновеным диференциальным уравнениям*, Г. И. Москва 1951.

[4] Митриновиќ Д.С.: *Зборник математичких проблема*, Београд 1958 година.

[5] Митриновиќ Д.С.: *Диференцијалне једначине зборник математичких проблема и задатка*, Београд 1986 година.

ABOUT SOLVING A DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER

Dimov A. Lazo

Summary

It is a natural tendency to reduct the solving of a differential equation with functional coefficients to solving of a differential equation with constant coefficients. Here, we give a suplement to this natural tendency, determining conditions in which a differential equation of second order with functional coefficients is reducted to a differential equation with constant coefficients. In the same time, we determine the solution of the differential equation.

Mašinski fakultet

p. fah 464

91 000 Skopje,

Makedonija