Математички Билтен
18 (XLIV)
1994 (93-102)
Скопје, Македонија

ISSN 0351-336X

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СОЛНЕЧНЫХ КОЛЛЕКТОРОВ

Радован Николич

Abstract. In this work the problem of Sun collectors will be solved by system of partial equations.

0. Введение. С математического аспекта солнечный коллектор это система двух поверхностей. Большая из этих поверхностей называется рефлектором, меньшая - абсорбером. Основная задача рефлектора собирать солнечные лучи из широкого пространства и концентрировать их в меньшее пространство абсорбера, а абсорбера конвертировать собраную энергию в каком-нибудь виде энергии.

Основная задача солнечного колектора, с точки зрения математики, отыскание уравнения поверхностей рефлектора и абсорбера. Эта задача сводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений, или систем уравнений в частных производных.

В [1,2,3,4] авторы получили некоторые системы уравнений в частных производных, но их не решали. В этой работе мы составим несколько систем уравнений в частных производных, а также определим некоторые решения этих систем.

1. Геометрические основы задачи. Мы будем рассматривать задачу в декартовой прямоугольной системе координат $O\xi\eta\zeta$. Пусть

$$\zeta = f(\xi,\eta) \tag{1}$$

уравнение поверхности рефлектора,

$$\zeta = F(\xi,\eta) \tag{2}$$

уравнение поверхности абсорбера.

Вектор

$$\vec{n} = \mathrm{grad}\phi(M) = (p,q,-1),$$

где

Mathematics Subject Classification (1991): 35 A 75

$$\phi(\xi,\eta,\zeta) \equiv f(\xi,\eta)' - \zeta,\ p = \left.\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right|_M,\ q = \left.\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right|_M$$

перпендикулярен к поверхности (1) в её точке $M(x,y,z)$.

Аналогично вектор

$$\vec{N} = \mathrm{grad}\Phi(A) = (P,Q,-1),$$

где

$$\Phi(\xi,\eta,\zeta) \equiv F(\xi,\eta) - \zeta,\ P = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right|_A,\ Q = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right|_A$$

перпендикулярен к поверхности (2) в её точке $A(X,Y,Z)$.

Пусть солнечные лучи падают на рефлектор параллельно оси $O\zeta$ координатной системы, т.е. параллельно вектору $\vec{k} = (0,0,1)$. В силу основного закона геометрической оптики перпендикуляр к поверхности (1) в её точке $M(x,y,z)$:

-образует равные углы с лучами падения и отражения;

-лежит в одной и той же плоскости с лучами падения и отражения (в так називаемой меридианной плоскости).

Если $\vec{l}_o$ орт луча отражения, тогда, на основе помянутого закона, вектор $\vec{n}$ образует равные углы с векторами $\vec{l}$ и $\vec{k}$, кроме того, построеный на векторах $\vec{l}_o$ и $\vec{k}$ паралелограмм ромб (Рис. 1). Следовательно, векторы $\vec{l}_o+\vec{k}$ и $\vec{n}$ коллинеарные, т.е.

$$\vec{l}_o + \vec{k} = \lambda\vec{n} \quad \text{или} \quad \vec{l}_o = \lambda\vec{n} - \vec{k},$$

где λ некоторая постоянная.

В силу того что $|\vec{l}_o| = 1$, т.е. $|\lambda\vec{n}-\vec{k}| = 1$, получим $\lambda = -\frac{2}{p^2+q^2+1}$. Чтобы упростить запись, для направляющего вектора луча отражения берем вектор

$$-\frac{\lambda}{2}\,\vec{l}_o = (2p,2q,p^2+q^2-1).$$

В этом случае, уравнение луча отражения в точке $M(x,y,z)$ имеет вид

$$\frac{\xi-x}{2p} = \frac{\eta-y}{2q} = \frac{\zeta-z}{p^2+q^2-1}. \tag{3}$$

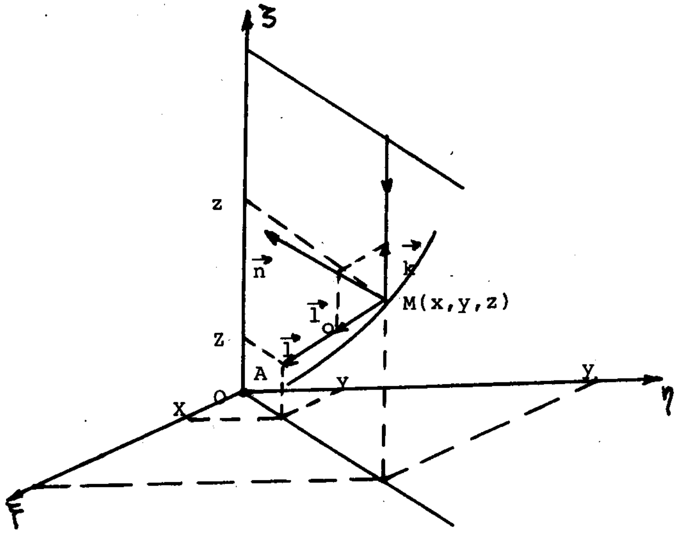

Рис 1

2. <u>Формулировка некоторых задач</u>. Если луч отражения (3) падает в точке A(X,Y,Z) абсорбера (2), то из (3) получаем

$$\frac{X-x}{2p} = \frac{Y-y}{2q} = \frac{Z-z}{p^2+q^2-1}, \qquad (3')$$

откуда

$$(Y-y)p - (X-x)q = 0, \qquad (4)$$

$$2(Z-z)p - (X-x)(p^2+q^2-1) = 0. \qquad (5)$$

Система (3) или (4)-(5) называется уравнением транспорта энергии и встречается в любой задаче солнечных коллекторов. Эта система неопределенная и чтобы решитьеё необходимо ввести дополнительные условия (уравнения). Некоторые дополнительные условия даны в следующие примеры:

1° Пусть дана форма абсорбера, т.е. уравнение (2). В этом случае в точке A(X,Y,Z) имеем

$$Z = F(X,Y,Z) \qquad (2')$$

2° Пусть измерения абсорбера в n раз меньше, чем измерения рефлектора (например, чтобы сэкономить материял). Этот факт в аналитической форме выражется уравнениями

$$X = \frac{x}{n}, \quad Y = \frac{y}{n}, \quad Z = \frac{z}{n}, \tag{6}$$

или уравнениями

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} \quad (=\frac{1}{n}). \tag{6'}$$

3° Лучшее преобразование световой энергии достигаем когда лучи отражения падают перпендикулярно к абсорберу. В этом случае, направляющий вектор луча отражения $\vec{I}$ коллинеарен с вектором $\vec{N}$; уравнение луча отражения падающего в точке $A(X,Y,Z)$ имеет вид

$$\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{-1}. \tag{3"}$$

Из (3") получаем

$$(Y-y)P - (X-x)Q = 0, \tag{7}$$

$$(Z-z)P + X-x = 0, \tag{8}$$

а из (5) и (8)

$$2p + (p^2+q^2-1)P = 0, \tag{9}$$

т.е.

$$\frac{p^2+q^2-1}{2p} = -\frac{1}{P}. \tag{9'}$$

Уравнение (9') називается уравнением перпендикулярного падения к абсорберу.

3. Решения сформулированных задач. 1° Эта задача приводится к решению системы (4)-(5)-(2'). Найдем Y и Z из (4) и (5), и подставим эти выражения в (2'), получим

$$z + \frac{p^2+q^2-1}{2p}(X-x) = F[X,\frac{q}{p}(X-x)].$$

Предположим, что это уравнение можно решить относительно $X-x$ и пусть это решение $X-x=G(x,y,z,p,q) \equiv G$. Выразив Y и Z через G и подставив полученные выражения для X,Y и Z в (2'), получаем

$$p^2+q^2 - \frac{2(z-F^*)p}{G} - 1 = 0,$$

где $F^* \equiv F(G+x,\frac{q}{p}G+y)$.

Последнее уравнение в частных производных первого порядка можно, в некоторых случаях, решать методом Лагранжа-Шарпи. В этом случае полученное решение зависит от двух произвольных постоянных, а это означает что данной форме абсорбера соответствует бесконечное множество форм рефлектора.

2° Эта задача приводится к решению системы (4)-(5)-(6). Подставив X,Y и Z из (6) в (4) и (5), и сокращая полученные уравнения на $(\frac{1}{n} - 1)$, получим

$$yp - xq = 0, \tag{4'}$$

$$2zp - x(p^2+q^2-1) = 0. \tag{5'}$$

Общее решение уравнения (4') будет

$$z = f(r), \tag{10}$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, f произвольная функция, которая удовлетворяет и уравнению (5').

Подставим (10) в (5) и решим полученное уравнение относительно f' $[=f'(r)]$

$$f' = \frac{f}{r} \pm \sqrt{(\frac{f}{r})^2 + 1}.$$

Общее решение этого уравнения будет

$$f(r) = Cr^2 - \frac{1}{4C},$$

где C произвольная постоянная; отсюда, в силу (10) будет

$$z = C(x^2+y^2) - \frac{1}{4C}. \tag{11}$$

В силу (6), из (11) получаем

$$Z = Cn(X^2+Y^2) - \frac{1}{4Cn}. \tag{12}$$

Следовательно, уравнение искомой поверхности рефлектора, в силу (11), будет

$$\zeta = C(\xi^2+\eta^2) - \frac{1}{4C}, \tag{11'}$$

а уравнение поверхности абсорбера, в силу (12),

$$\zeta = Cn(\xi^2+\eta^2) - \frac{1}{4Cn}. \tag{12'}$$

На Рис 2 показанны поверхности (11′) и (12′).

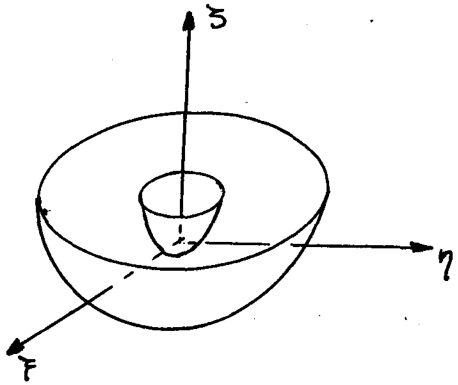

Рис 2

3° Решение этой задачи сводится к решению системы (4)-(5)-(7)-(8) или системы (4)-(5)-(7)-(9). Уравнениям (4) и (7) соответствуют уравнения

$$\frac{dx}{Y-y} = -\frac{dy}{X-x} \qquad \frac{dX}{Y-y} = -\frac{dY}{X-x},$$

из которых получаем

$$\frac{dX-dx}{Y-y} = -\frac{dY-dy}{X-x}.$$

Общее решение этого уравнения будет

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 = C_1. \qquad (13)$$

Решение (13), также будет решением уравнений (4) и (7), поэтому общие решения уравнений (4) и (7) будут

$$z = f(u), \qquad (14)$$

$$Z = F(u), \qquad (15)$$

где $u = \sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}$, f и F произвольные функции.

Подставляя (14) и (15) в (5) и (9), получаем

$$(F-f)F' + u = 0, \tag{5'}$$

$$F' = \frac{2F'}{f'^2-1}, \tag{6'}$$

где $f' = f'(u)$, $F' = F'(u)$. Исключая F и F' из (5') и (6'), получаем

$$\frac{1}{u} - \frac{(f'^4-1)f'f''}{f'^2(f'^4-4f'^2-1)} = 0$$

и отсюда

$$\left(\frac{f'^2-2+\sqrt{5}}{f'^2-2-\sqrt{5}}\right)^2\left(\frac{u}{f'^2}\right)^{\sqrt{5}} = C_2.$$

Полученное уравнение неразрешимо относительно f'^2, а это значит что невозможно отыскать решения вида (14) и (15), чтобы удоволетворяли уравнениям (5) и (9).

Первый интеграл (13) можно написать в виде

$$(x^2+y^2) - 2(Xx+Yy) + (X^2+Y^2) = C_1$$

Выражения (x^2+y^2), $(Xx+Yy)$ и (X^2+Y^2) будут решениями уравнений (4) и (7) только тогда, когда $Xy-Yx = 0$, т.е.

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} \quad \text{или} \quad \frac{y}{x} = \frac{Y}{X}. \tag{16}$$

Условие (16) означает что лучи падения и отражения лежат в одной и той же плоскости. Это условие всегда выполнено потому что эти лучи находятся в меридианной плоскости.

Пусть луч MA пересекает ось $O\zeta$ в точке $0(0,0,0)$ (иначе координатную систему параллельно перенесем в точку пресечения). В этом случае, первое равенство (16) можно дополнить еще одним дробным $\frac{Z}{z} = \frac{1}{n}$ и тогда получаем уравнения (6). Таким образом, решение сформулированной задачи сводится к решению системы (4)-(5)-(6)-(7)-(9).

Задачу (4)-(5)-(6)' мы решали в 2^O и её решение дано через (11) или (11').

Задача отыскания уравнения абсорбера сводится к решению системы (6)-(7)-(8). Решение этой системы будем искать в виде

$$Z = F(R), \tag{17}$$

где $R = \sqrt{X^2+Y^2}$, F произвольная функция.

Из (6) и (8) получаем

$$ZP + X = 0,$$

или, в силу (17)

$$FF' + R = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$F^2 + R^2 = C_3^2,$$

откуда

$$X^2+Y^2+Z^2 = C_3^2. \tag{18}$$

Выразим зависимость C_3 от C. Точка $M(0,0,-\frac{1}{4C})$ лежит на поверхности (11), а соответствующая точка поверхности (18), в силу (6), будет $A(0,0,-\frac{1}{4Cn})$. Подставив в (18) координаты точки A, получаем $C_3 = \frac{1}{4Cn}$. Следовательно, искомая поверхность абсорбера, в силу (18), будет

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{16C^2n^2}$$

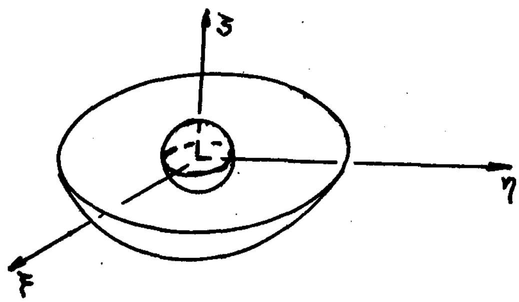

Рис 3

Замечание. Если пересечем поверхность (11′) плоскостью $\eta = 0$, то в сечении получим линию

$$\eta = 0, \qquad \zeta = C\zeta^2 - \frac{1}{4C},$$

как поперечное сечение параболического цилиндра

$$\zeta = C\zeta^2 - \frac{1}{4C}. \tag{19}$$

Аналогично линия

$$\eta = 0, \qquad \xi^2 + \zeta^2 = \frac{1}{16C^2n^2},$$

будет поперечным сечением кругового цилиндра

$$\xi^2 + \zeta^2 = \frac{1}{16C^2n^2} \tag{20}$$

Уравнениями (19) и (20) дано ещё одно решение задач (4)-(5)-(7)-(8), (Рис 4).

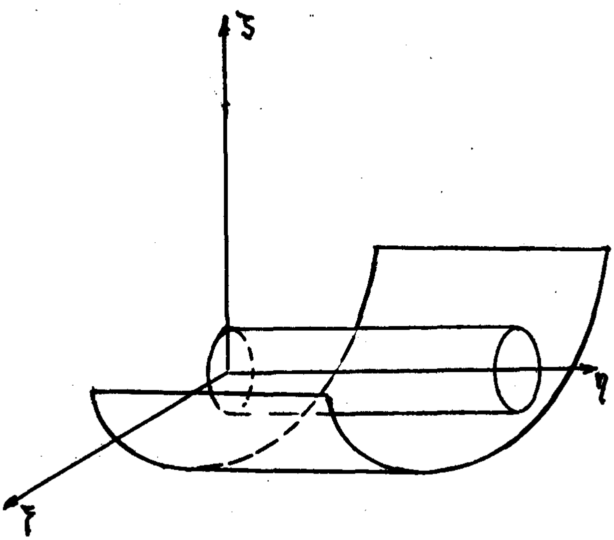

Рис 4

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Димитровски Д.: Диференцијални равенки на Сончевите колектори (работа в рукописи)

[2] Dimitrovski D., Mijatović M., Veselinović V.: Differential geometry os solar collectors, Conference on Applied Mathematics 5, Ljubljana 2-5 September, 1986

[3] Dimitrovski D., Mijatović M., Veličkova V.: Les properties specifiques des systemes ineterminees des equations differentielles des collecteurs du Soleil, Punime matematike N° 1, Priština, 1986

[4] Димитровски Д., Мијатовиќ М., Веселиновиќ В.: Системи диференцијални равенки за подобрување на конструкцијата на концентраторите на Сончевата енергија, Прилози, МАНУ, Скопје

ПАРЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ НА СОНЧЕВИТЕ КОЛЕКТОРИ

Радован Николич

Р е з и м е

Во оваа работа се поставуваат некои проблеми на Сончевите колектори, во термини на парцијални равенки, а потоа истите се решаваат.

Природно-математички факултет
Видовданска бб
Приштина, Југославија