КРИТЕРИЈУМИ ИНТЕГРАБИЛНОСТИ ЈЕДНЕ ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ТРЕЋЕГ РЕДА

Стеван Шарановић

1. Диференцијална једначина трећег реда

$$(a_0 f+b_0)\,y'''+(a_1 f+b_1)\,y''+(a_2 f+b_2)\,y'+(a_3 f+b_3)\,y=0, \tag{1}$$

где су a_i, b_i $(i=0, 1, 2, 3)$-константе, а $f=f(x)$-функција одређена релацијом

$$f'=\alpha f+\beta \quad (\alpha, \beta=\text{const.}),$$

може се написати у облику

$$\begin{aligned} &[(A_0 f+B_0)\,y''+(A_1 f+B_1)\,y'+(A_2 f+B_2)\,y]'+\\ &+A\,[(A_0 f+B_0)\,y''+(A_1 f+B_1)\,y'+(A_2 f+B_2)\,y]=0, \end{aligned} \tag{2}$$

где су A_i, B_i $(i=0, 1, 2)$ и A засад неодређене константе.
Ако ставимо

$$(A_0 f+B_0)\,y''+(A_1 f+B_1)\,y'+(A_2 f+B_2)\,y=z,$$

једначина (2) постаје

$$z'+Az=0$$

чији је општи интеграл

$$z=c_1\,e^{-Ax}.$$

Одавде следи да се општи интеграл једначине (1), у случају када се иста може писати у облик (2), добија помоћу општег интеграла диференцијалне једначине

$$(A_0 f+B_0)\,y''+(A_1 f+B_1)\,y'+(A_2 f+B_2)\,y=c_1\,e^{-Ax}. \tag{3}$$

2. Ако се у једначини (2) изврши назначено диференцирање, након срећивања иста постаје

$$(A_0 f + B_0)\ y''' + [(A_1 + AA_0 + \alpha A_0)\ f + B_1 + AB_0 + \beta A_0]\ y'' +$$
$$+ [(A_2 + AA_1 + \alpha A_1)\ f + B_2 + AB_1 + \beta A_1]\ y' +$$
$$+ [(AA_2 + \alpha A_2)\ f + AB_2 + \beta A_2]\ y = 0.$$

Задња диференцијална једначина биће еквивалентна диференцијалној једначини (1), ако важи следећи систем једначина

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ B_0 &= b_0 \\ A_1 + AA_0 + \alpha A_0 &= a_1 \\ B_1 + AB_0 + \beta A_0 &= b_1 \\ A_2 + AA_1 + \alpha A_1 &= a_2 \\ B_2 + AB_1 + \beta A_1 &= b_2 \\ AA_2 + \alpha A_2 &= a_3 \\ AB_2 + \beta A_2 &= b_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Из првих шест једначина система (4) налазимо

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ B_0 &= b_0 \\ A_1 &= a_1 - a_0 A - \alpha a_0 \\ B_1 &= b_1 - \beta a_0 - b_0 A \\ A_2 &= a_2 + \alpha (\alpha a_0 - a_1) + (2 \alpha a_0 - a_1)\ A + a_0 A^2 \\ B_2 &= b_2 + \beta (\alpha a_0 - a_1) + (2 \beta a_0 - b_1)\ A + b_0 A^2, \end{aligned}$$

а у вези с тим задње две једначине истог система постају

$$\begin{aligned} & a_0 A^3 + (3 \alpha a_0 - a_1)\ A^2 + [a_2 + \alpha (3 \alpha a_0 - 2 a_1)]\ A + \\ & + \alpha [a_2 + \alpha (\alpha a_0 - a_1)] - a_3 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & b_0 A^3 + (3\beta a_0 - b_1)\ A^2 + [b_2 + \beta (3 \alpha a_0 - 2 a_1)]\ A + \\ & + \beta [a_2 + \alpha (\alpha a_0 - a_1)] - b_3 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Дакле, једначина (1) има облик (2), ако константе a_i, b_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ и A задовољавају релације (5) и (6) и у том се случају њена интеграција своди на интеграцију једначине (3).

У [1] је показано да се једначина (3) може интегрирати, ако су константе A_i, B_i $(i = 0, 1, 2)$ везани реалцијом

$$[A_0 B_2 + A_2 B_0 + (B_1 + \alpha B_0)\, r + (A_0 \beta + \alpha B_0)\, (A_0 \alpha n + a_1 + 2\, r)\, n]^2 +$$
$$+ (A_0 \beta - B_1)\, (2r + A_1 - A_0 \alpha)\, [A_0 B_2 + A_2 B_0 + (B_1 + \alpha B_0)\, r + (A_0 \beta +$$
$$+ \alpha B_0)\, (A_0 \alpha n + a_1 + 2r)\, n] + (2\, r + A_1 - A_0 \alpha)^2 [B_0 B_2 + B_0 \beta\, (2n+1)\, r +$$
$$+ B_0 \beta\, (A_1 + A_0 \alpha)\, n] = 0 \tag{7}$$

за

$$(2\, n + 1)^2\, A_0^2 \alpha^2 + 4\, A_0 A_2 - A_1^2 \neq 0,$$

где је

$$r_{1/2} = \frac{-(A_1 + 2\, A_0\, \alpha n) \pm \sqrt{A_1^2 - 4\, A_0 A_2}}{2}, \tag{8}$$

n-нула или природан број, или релацијама

$$(2\, n + 1)^2\, A_0^2 \alpha^2 + 4\, A_0 A_2 - A_1^2 = 0,$$

$$2n\, (n + 1)\, A_0 \alpha\, (A_0 \beta + \alpha B_0) + 2\, (A_0 B_2 + A_2 B_0) + (\alpha B_0 + B_1)\, (A_0 \alpha - A_1) = 0.$$

За $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ т.ј. за $f(x) = x$, овде добивени резултати прелазе у резултате добивене у [2].

ПРИМЕР. Диференцијална једначина

$$(e^x + 1)\, y''' - (e^x + 2)\, y'' - (e^x + 1)\, y' + (e^x + 2)\, y = 0 \tag{9}$$

може се записати као

$$[(e^x + 1)\, y'' - (e^x + 1)\, y]' - 2\, [(e^x + 1)\, y'' - (e^x + 1)\, y] = 0.$$

Ако ставимо

$$(e^x + 1)\, y'' - (e^x + 1)\, y = z,$$

иста постаје

$$z' - 2\, z = 0.$$

Како је општи интеграл последње једначине

$$z = c_1\, e^{2x},$$

општи интеграл једначине (9) добија се помоћу општег интеграла диференцијалне једначине

$$(e^x + 1)\, y'' - (e^x + 1)\, y = c_1\, e^{2x}.$$

Применом Лагранжовог метода варијације констаната, за општи интеграл последње једначине налазимо

$$y = \frac{c_1}{2}\left[(e^x - e^{-x})\, ln\,(e^x + 1) - \frac{1}{2}\, e^x + 1\right] + c_2 e^x + c_3\, e^{-x}.$$

Према томе, општи интеграл диференцијалне једначине (9) дат је као

$$y = c_1 (e^x - e^{-x})\ \ln e\,(e^x + 1) + c_2\, e^x + c_3 e^{-x}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Šapkarev: Sur une équation linéaire différentielle du second ordre resoluble par quadratures. Bulletin de la Société des Math. et des Phys. de la R.S. de Macédoine, Tome XIX, 1968, pp. 5—8.

2. И. А. Шапкарев: За некои критериуми за интеграбилност на Лапласовата диференцијална равенка од трет ред. Годишен Зборник на ЕМФ во Скопје, Кн. 5—6, 1972/1973, стр. 5—15.

Stevan Šaranovič

SUR DES CRITERIUMS QUELQONQUES D'INTEGRABILITE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DU TROISIEME ORDRE

Résumé

Dans cet article, on démontre que l'équation différentielle du troisième ordre (1) ou peut ecrire sous la forme (2), si les constantes a_i, b_i (i = 0, 1, 2, 3) et A satisvont aux relations (5) et (6). Dans ce cas, l'équation (1) on peut intégrer, si les constantes A_i, B_i (i=0, 1, 2) satisvont à ļa relation (7), ou r est deffini par (8) et n est un nombre naturele ou zero.