ÜBER DIE ALGEBRAISCHE INTEGRIERUNG DER ABELSCHEN UND RICCATISCHEN DIFFERFNTIALGLEICHUNGEN

Ilija A. Šapkarev

1. In dieser Arbeit zeigen wir, daß die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{n-k} = 0 \tag{1}$$

n verschiedene partikuläre Integrale der Differentialgleichung

$$y' = f_0(x)\, y^m + f_1(x) y^{m-1} + \cdots + f_{m-1}(x)\, y + f_m(x) \tag{2}$$

werden sein, wenn die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_0\, y^{m+n-k-1} + \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_1\, y^{m+n-k-2} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_2\, y^{m+n-k-3} + \cdots + \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_{m-2}\, y^{n-k+1} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n} [a_k' + (n-k)\, a_k f_{m-1}]\, y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_m\, y^{n-k-1} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

teilbar mit der Gleichung (1) ist.

Für $m = 3$ werden die Wurzeln der Gleichung (1) partikuläre Integrale der Gleichung (2) das heißt der Abelschen Differentialgleichung

$$y' = f_0(x)\, y^3 + f_1(x)\, y^2 + f_2(x)\, y + f_3(x) \tag{4}$$

sein, wenn das System

$$\begin{aligned} &[(k+3)\, a_{k+3} + (a_1^2 - 2a_2)\, a_{k+1} - a_1\, a_{k+2}]\, f_0 + \\ &+ [(k+2)\, a_{k+2} - a_1 a_{k+1}]\, f_1 + (k+1)\, a_{k+1} f_2 - (n-k)\, a_k f_3 = a'_{k+1} \\ &(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1;\ a_0 = 1,\ a_{n+1} = a_{n+2} = 0) \end{aligned} \tag{5}$$

ausgefüllt ist.

Für $m = 2$ werden die Wurzeln der Gleichung (1) verschiedene partikuläre Integrale der Differentialgleichung (2) das heißt der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = f_0(x)y^2 + f_1(x)y + f_2(x) \tag{6}$$

sein, wenn das System

$$\begin{gathered}[(k+2)\, a_{k+2} - a_1\, a_{k+1}]\, f_0 + (k+1)\, a_{k+1}\, f_1 - (n-k)\, a_k\, f_2 = a'_{k+1} \\ (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1,\ a_0 = 1,\ a_{n+1} = 0)\end{gathered} \tag{7}$$

ausgefüllt ist.

Weiter werden die Bediengungen für die algebraische Integrierung der Abelschen und Riccatischen Differentialgleichungen für speziäle Werte von n gegeben.

Eine ausfürliche Darstellung dieser Untersuchungen findet man in die früheren Veröffentlichungen von Lj. Tschakaloff [1] und von H. Lemke [2].

2. Zu diesem Zweck differenzieren wir die Gleichung (1) und bekommen die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k\, y^{n-k-1}\, y' + a'_k\, y^{n-k}] = 0.$$

Wenn wir y' von dieser Gleichung und von der Gleichung (2) eliminieren, bekommen wir gerade die Gleichung (3). Weil das Grade der algebraischen Gleichung (3) $m + n - 1$ ist, werden alle Wurzeln der Gleichung (1) ihre Wurzeln sein, wenn sie teilbar mit der Gleichung (1) ist.

2.1. Für $m = 3$ die Gleichung (3) wird

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_0\, y^{n-k+2} + \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k\, f_1\, y^{n-k+1} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n} [(n-k)\, a_k f_2 + a_k']\, y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k\, f_3\, y^{n-k-1} = 0.\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Da

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_0\, y^{n-k+2} = (ny^2 - a_1 y + a_1^2 - 2a_2) f_0 \sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} [a_1 a_{k+2} - (k+3)\, a_{k+3} - a_{k+1}\, (a_1^2 - 2a_2)]\, f_0\, y^{n-k-1}, \\ &\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k\, f_1\, y^{n-k+1} = (ny - a_1)\, f_1 \sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} [a_1 a_{k+1} - (k+2)\, a_{k+2}]\, f_1\, y^{n-k-1},\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} [(n-k)\, a_k f_2 + a_k'] \, y^{n-k} = n f_2 \sum_{k=0}^{n} a_k \, y^{n-k} +$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} [a'_{k+1} - (k+1)\, a_{k+1} f_2] \, y^{n-k-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_3 \; y^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, a_k f_3 \, y^{n-k-1}$$

die letzte Gleichung wird

$$[(ny^2 - a_1 y + a_1^2 - 2a_2)\, f_0 + (ny - a_1)\, f_1 + n f_2] \sum_{k=0}^{n} a_k \, y^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \{[a_1 a_{k+2} - (k+3)\, a_{k+3} - a_{k+1} (a_1^2 - 2a_2)]\, f_0 +$$

$$+ [a_1 a_{k+1} - (k+2)\, a_{k+2}]\, f_1 + [a'_{k+1} - (k+1)\, a_{k+1} f_2] +$$

$$+ (n-k)\, a_k f_3\} \, y^{n-k-1} = 0.$$

Diese Gleichung wird teilbar mit der Gleichung (1) sein, wenn das System (5) ausgefüllt ist.

Dieses System für $n = 4$ wird

$$(a_1^3 - 3a_1a_2 + 3a_3)\, f_0 + (2a_2 - a_1^2)\, f_1 + a_1 f_2 - 4f_3 = a_1',$$

$$(a_1^2a_2 - 2a_2^2 - a_1a_3 + 4a_4)\, f_0 + (3a_3 - a_1a_2) f_1 + 2a_2 f_2 - 3a_1 f_3 = a_2',$$

$$(a_1^2a_3 - 2a_2a_3 - a_1a_4)\, f_0 + (4a_4 - a_1a_3)\, f_1 + 3a_3 f_2 - 2a_2 f_3 = a_3'$$

$$(a_1^2a_4 - 2a_2a_4)\, f_0 - a_1a_4 f_1 + 4a_4 f_2 - a_3 f_3 = a_4'.$$

Von diesem System lassen sich die Koeffizienten f_0, f_1, f_2 und f_3 sehr leicht durch die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und a_4 ausdrücken.

Das System (5) für $n = 5$ wird

$$(a_1^3 - 3a_1a_2 + 3a_3)\, f_0 + (2a_2 - a_1^2) f_1 + a_1 f_2 - 5f_3 = a_1',$$

$$(a_1^2a_2 - 2a_2^2 - a_1a_3 + 4a_4)\, f_0 + (3a_3 - a_1a_2)\, f_1 + 2a_2 f_2 - 4a_1 f_3 = a_2',$$

$$(a_1^2a_3 - 2a_2a_3 - a_1a_4 + 5a_5)\, f_0 + (4a_4 - a_1a_3) f_1 + 3a_3 f_2 - 3a_2 f_3 = a_3',$$

$$(a_1^2a_4 - 2a_2a_4 - a_1a_5) f_0 + (5a_5 - a_1a_4)\, f_1 + 4a_4 f_2 - 2a_3 f_3 = a_4',$$

$$(a_1^2a_5 - 2a_2a_5)\, f_0 + a_1a_5 f_1 + 5a_5 f_2 - a_4 f_3 = a_5'.$$

Wenn wir die Koeffizienten f_0, f_1, f_2 und f_3 von diesen System eliminieren, bekommen wir zwischen die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5 die Verbindung

$$\begin{vmatrix} a_1^3 - 3a_1a_2 + 3a_3 & a_1^2 - 2a_2 & a_1 & 5 & a_1' \\ a_1^2a_2 - 2a_2^2 - a_1a_3 + 4a_4 & a_1a_2 - 3a_3 & 2a_2 & 4a_1 & a_2' \\ a_1^2a_3 - 2a_2a_3 - a_1a_4 + 5a_5 & a_1a_3 - 4a_4 & 3a_3 & 3a_2 & a_3' \\ a_1^2a_4 - 2a_2a_4 - a_1a_5 & a_1a_4 - 5a_5 & 4a_4 & 2a_3 & a_4' \\ a_1^2a_5 - 2a_2a_5 & a_1a_5 & 5a_5 & 5a_3 & a_5' \end{vmatrix} = 0.$$

Unter diesen Bedingung lassen sich die Koeffizienten f_0, f_1, f_2 und f_3 durch die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und durch ihre erste Ableitungen rational ausdrücken.

Wen diese Verbindung besteht, dann werden die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$y^5 + a_1(x)y^4 + a_2(x)y^3 + a_3(x)y^2 + a_4(x)y + a_5(x) = 0$$

fünf verschiedene partikuläre Integrale der Abelschen Gleichung (4) sein.

2.2. Für $m = 2$ die Gleichung (3) wird

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_0\, y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} [(n-k)\, a_k f_1 + a_k']\, y^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_2\, y^{n-k-1} = 0.$$

Da

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_0\, y^{n-k+1} = (ny - a_1) f_0 \sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} [a_1 a_{k+1} - (k+2)\, a_{k+2}]\, f_0\, y^{n-k-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} [(n-k)\, a_k f_1 + a_k']\, y^{n-k} = nf_1 \sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} [a_k' - (k+1)\, f_1]\, y^{n-k-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k f_2\, y^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, a_k f_2\, y^{n-k-1}$$

die letzte Gleichung wird

$$(ny + n - a_1) f_0 \sum_{k=0}^{n} a_k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \{[a_1 a_{k+1} - (k+2) a_{k+2}] f_0 -$$

$$- (k+1) a_{k+1} f_1 + (n-k) a_k f_2 + a'_{k+1}\} y^{n-k-1} = 0.$$

Diese Gleichung wird teilbar mit der Gleichung (1) sein, wenn das System (7) ausgefüllt ist.

Dieses System für $n = 4$ wird

$$(2a_2 - a_1^2) f_0 + a_1 f_1 - 4f_2 = a_1'$$

$$(3a_3 - a_1 a_2) f_0 + 2a_2 f_1 - 3a_1 f_2 = a_2',$$

$$(4a_4 - a_1 a_3) f_0 + 3a_3 f_1 - 2a_2 f_2 = a_3'$$

$$- a_1 a_4 f_0 + 4a_4 f_1 - a_3 f_2 = a_4'.$$

Wenn wir die Koeffizienten f_0, f_1 und f_2 dieses Systems eliminieren, bekommen wir zwischen den Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und a_4 die Verbindung

$$\begin{vmatrix} 2a_2 - a_1^2 & a_1 & 4 & a_1' \\ 3a_3 - a_1 a_2 & 2a_2 & 3a_1 & a_2' \\ 4a_4 - a_1 a_3 & 3a_3 & 2a_2 & a_3' \\ - a_1 a_4 & 4a_4 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn diese Verbindung besteht, dann werden die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$y^4 + a_1(x) y^3 + a_2(x) y^2 + a_3(x) y + a_4(x) = 0$$

vier verschiedene partikuläre Integrale der Gleichung (6) sein.

Unter diese Bedingung lassen sich die Koeffizienten f_0, f_1 und f_2 sehr leicht durch die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 und durch ihre Ableitungen rational ausdrücken.

Für $n = 5$ das System (7) wird

$$(2a_2 - a_1^2) f_0 + a_1 f_1 - 5f_2 = a_1'$$

$$(3a_3 - a_1 a_2) f_0 + 2a_2 f_1 - 4a_1 f_2 = a_2',$$

$$(4a_4 - a_1 a_3) f_0 + 3a_3 f_1 - 3a_2 f_2 = a_3',$$

$$(5a_5 - a_1 a_4) f_0 + 4a_4 f_1 - 2a_3 f_2 = a_4',$$

$$- a_1 a_5 f_0 + 5a_5 f_1 - a_4 f_2 = a_5'.$$

Von den ersten 3 Gleichungen dieses Systems lassen sich die Koeffizienten f_0. f_1 und f_2 durch die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5 ausdrücken und durch ihre Einsetzung in die dritten und vierten Gleichung folgen die Relationen

$$\begin{vmatrix} 2a_2 - a_1^2 & a_1 & 5 & a_1' \\ 3a_3 - a_1a_2 & 2a_2 & 4a_1 & a_2' \\ 4a_4 - a_1a_3 & 3a_3 & 3a_2 & a_3' \\ 5a_5 - a_1a_4 & 4a_4 & 2a_3 & a_4' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2a_2 - a_1^2 & a_1 & 5 & a_1' \\ 3a_3 - a_1a_2 & 2a_2 & 4a_1 & a_2' \\ 4a_4 - a_1a_3 & 3a_3 & 3a_2 & a_3' \\ - a_1a_5 & 5a_5 & a_4 & a_5' \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn diese Relationen bestehen, dann werden die Wurzeln der algebraische Gleichung

$$y^5 + a_1(x)y^4 + a_2(x)y^3 + a_3(x)y^2 + a_4(x)y + a_5(x) = 0$$

fünf verschiedene partikuläre Integrale der Gleichung (6) sein.

Für $n = 6$ das System (7) wird

$$\begin{aligned}
(2a_2 - a_1^2) f_0 + a_1 f_1 - 6 f_2 &= a_1', \\
(3a_3 - a_1a_2) f_0 + 2a_2 f_1 - 5a_1 f_2 &= a_2', \\
(4a_4 - a_1a_3) f_0 + 3a_3 f_1 - 4a_2 f_2 &= a_3', \\
(5a_5 - a_1a_4) f_0 + 4a_4 f_1 - 3a_3 f_2 &= a_4', \\
(6a_6 - a_1a_5) f_0 + 5a_5 f_1 - 2a_4 f_2 &= a_5', \\
- a_1a_6 f_0 + 6a_6 f_1 - a_5 f_2 &= a_6',
\end{aligned}$$

und für $n = 7$ wird

$$\begin{aligned}
(2a_2 - a_1^2) f_0 + a_1 f_1 - 7 f_2 &= a_1', \\
(3a_3 - a_1a_2) f_0 + 2a_2 f_1 - 6a_1 f_2 &= a_2', \\
(4a_4 - a_1a_3) f_0 + 3a_3 f_1 - 5a_2 f_2 &= a_3', \\
(5a_5 - a_1a_4) f_0 + 4a_4 f_1 - 4a_3 f_2 &= a_4', \\
(6a_6 - a_1a_5) f_0 + 5a_5 f_1 - 3a_4 f_2 &= a_5', \\
(7a_7 - a_1a_6) f_0 + 6a_6 f_1 - 2a_5 f_2 &= a_6', \\
- a_1a_7 f_0 + 7a_7 f_1 - a_6 f_2 &= a_7'.
\end{aligned}$$

Wenn diese Systemen ausgefüllt sind, dann werden die Wurzeln der Algebraischen Gleichung

$$y^6 + a_1(x)y^5 + a_2(x)y^4 + a_3(x)y^3 + a_4(x)y^2 + a_5(x)y + a_6(x) = 0$$

beziehungsweise

$$y^7 + a_1(x)y^6 + a_2(x)y^5 + a_3(x)y^4 + a_4(x)y^3 + a_5(x)y^2 + a_6(x)y + a_7(x) = 0$$

6 beziehungiwesse 7 verschiedene partikuläre Integrale der Gleichung (6) sein.

LITERATUR

[1] Tschakaloff Lj., Über die Riccatischen Differentialgleichungen, Jahrbuch der Universität Sveti Kliment Ochridski in Sofia, pfysico-matematischen Facultät. Bd. XXXVII, 1940/41 B. L. (Mathematik und Physik).

[2] Lemke H., Über eine Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 180, Heft 3, 1939.

Илија А. Шайкарев

ЗА АЛГЕБАРСКОТО РЕШАВАЊЕ НА АБЕЛОВИ И РИКАТИЕВИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

СОДРЖИНА

Во оваа работа се покажува дека n-те различни корени на алгебарската равенка (1) ке бидат партикуларни интеграли на диференцијалната равенка (2), ако равенката (3) е делива со равенката (1). За $m = 3$ корените на равенката (1) ке бидат партикуларни интеграли на равенката (4) ако е исполнет системот равенки (5). За $m = 2$ корените на равенката (1) ке бидат партикуларни интеграли на равенката (6) ако е исполнет системот равенки (7). Понатака се дадени услови за алгебарско интегрирање на Абеловата и Рикатиевата равенка за посебни вредности на n.