РЕДУКЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Пешар Р. Лазов ,Драїан С. Димиѿровски, Милоје Рајович

1. Если дифференциальный оператор

$$(1) \qquad P(D) = D_3 + 3\, b_2(x)\, D^2 + b_1(x)\, D + b_0(x) \left(D \equiv \frac{d}{dx} \right),$$

где $b_i(x)$ $(i = 0, 1, 2)$ — произвольные непрерывные функции, может факторизироваться в виде

$$(2) \qquad P(D) = (D + a_2(x))\ (D^2 + a_1(x)\ D + a_0(x)),$$

тогда линейное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$(E) \qquad y''' + 3\, b_2(x)\ y'' + b_1(x)\ y' + b_0(x)\ y = 0$$

сводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$y'' + a_1(x)\ y' + a_0(x) = c\ \exp\left(- \int a_2(x)\ dx \right) \quad (c = \text{const.}).$$

Найдём некоторые достаточные условия при которых справедлива эта редукция.

Если приравним (1) и (2), получаем

$$a_2 = b_2 + u, \quad a_1 = 2b_2 - u,$$

$$a_0 = u^2 - b_2\, u + u' + b_1 - 2\, b_2^2 - 2b_2',$$

где функция $u = u(x)$ определена уравнением

$$(3) \qquad u^3 + Au + 3\, uu' + u'' = B,$$

где

(4) $$A = b_1 - 3b_2^2 - 3b_2'; \quad B = b_0 + 2b_2^3 - b_1 b_2 + 6b_2 b_2' + b_2'' - b_1'.$$

2. Уравнение (3) претставляет дифференциальное уравнение Риккати второго порядка и в общем случае не может интегрироваться с помощью квадратур. Между тем, если известно выражение для $u(x)$ в конечном виде, тогда уравнение (E) редуцируется к линейному уравнению второго порядка. Для нахождения выражения для $u(x)$ в конечном виде используем способ, примен ённый в [1].

а) $$u^3 + Au = 0, \quad 3uu' + u'' = B.$$

При $u = 0$ получается условие

(5) $$B = 0,$$

а при $u = \pm\sqrt{-A}$ условие

(6) $$-\frac{3}{2}A' \pm \frac{(A')^2 - 2AA''}{4A\sqrt{-A}} = B.$$

б) $$u^3 + 3uu' = 0, \quad Ay + u'' = B.$$

Из первого соотношения получается $u = 3/(x+k)$, в то время как второе соотношение да ёт условие

(7) $$3A(x+k)^2 + 6 = B(x+k)^3,$$

где k-константа.

в) $$u^3 = B, \quad 3uu' + u'' + Au = 0.$$

Здесь $u = \omega_t \sqrt[3]{B}$, где ω_t $(t = 1, 2, 3)$ — корни уравнения $\omega^3 = 1$, и тогда

(8) $$3\omega_t BB'\sqrt[3]{B} + BB'' - \frac{2}{3}(B')^2 + 3AB^2 = 0.$$

г) $$Au + 3uu' = 0, \quad u^3 + u'' = B.$$

Так как $u = k - \frac{1}{3}IA$, где $IA = \int A\,dx$, из второго соотношения вытекает условие

(9) $$\left(k - \frac{1}{3}IA\right)^3 - \frac{1}{3}A' = B.$$

д) $$Au + u'' = 0, \quad u^3 + 3uu' = B.$$

В общем случае ни одно из этих двух уравнений не определяет $u(x)$ в конечном виде. Между тем, елси известны два линейно независимые решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ уравнения $u'' + Au = 0$ (например, при $A = \text{const.}$), тогда второе соотношение даёт условие

$$(k_1 u_1 + k_2 u_2)^3 + 3(k_1 u_1 + k_2 u_2)(k_1 u_1' + k_2 u_2') = B, \tag{10}$$

где k_1 и k_2-произвольные константы.

е) $$Au = B, \quad u^3 + 3uu' + u'' = 0.$$

Пир $A \neq 0$ получается $u = B/A$, и находим

$$B^3 + A(AB'' - A''B) + (3B - 2A')(AB' - A'B) = 0. \tag{11}$$

ж) $$3uu' + u'' = 0, \quad u^3 + Au = B.$$

При $u = k = \text{const.}$ получается условие

$$k^3 + kA = B, \tag{12}$$

а при $u = u_1(x)$, где функция $u_1(x)$ определена как

$$\int \frac{du_1}{k_1 - \frac{3}{2}u_1^2} = x + k_2 \quad (k_1, k_2 = \text{const}),$$

получается

$$u_1^3 + Au_1 = B. \tag{13}$$

з) $$3uu' = B, \quad u^3 + Au + u'' = 0.$$

Из первого соотношения вытекает $3u^2 = 2IB + k$, а второе соотношение принимает вид

$$(2IB + k)\left[\frac{1}{3}(2IB + k)^2 + A(2IB + k) + B'\right] - B^2 = 0. \tag{14}$$

и) $$u'' = B, \quad u^3 + Au + 3uu' = 0.$$

Так как $u = I^2 B + k_1 x + k_2$, приходим к следующему соотношению

$$(I^2 B + k_1 x + k_2)^2 + A + 3(IB + k_1) = 0. \tag{15}$$

Учитывая (4), каждое из полученных соотношений между A и B определяет одно соотношение между функциями $b_2(x)$, $b_1(x)$ и $b_0(x)$. При этом соотношение (5) вытекает из соотношения (12) при $k = 0$.

ТЕОРЕМА. Линейное дифференциальное уравнение третьего порядка (E) редуцируется к линейному дифференциальному уравнению второго порядка, если функции $b_j(x)$ $(j = 0, 1, 2)$ связаны некоторым из соотношений (i) $(i = \overline{6,15})$.

ПРИМЕЧАНИЕ Параллельно с факторизацией (2), можно рассмотреть и факторизацию вида

$$P(D) = (D^2 + c_1(x)\, D + c_0(x))\ (D + c_2(x)),$$

от куда также следуют некоторые достаточные условия при которых уравнение (E) сводится к линейному уравнению второго порядка. Также, при нахождении достаточных условий для факторизации оператора $P(D)$. можно использовать и переход к сопряжённому дифференциальному оператору. Эти замечания были сделаны Л. М. Берковичем, и они будут рассмотрены в одной из следующих работ авторов данного труда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Хакимов: Куйбышев. Политех. Инст., физ.-мат. сборник. 1969, 374—376.
2. T. Jwinski: Rozprawy mat., XIII, 50 pp, Warszawa, 1961.

Петар Р. Лазов, Драган С. Димитровски, Милоје Рајовић

РЕДУКТИБИЛНОСТ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ТРЕТ РЕД

Резиме

Во овој труд се покажува дека линеарната диференцијална равенка од трет ред (E) се редуцира на линеарна дифереиијална равенка од втор ред, ако функциите $b_2(x)$, $b_1(x)$ и $b_0(x)$ се сврзани со некоја од релациите (i) $(i = \overline{6,15})$.