ФАКТОРИЗАЦИЈА НА ЕДЕН ПОЛИНОМЕН ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН ОПЕРАТОР

Петар Р. Лазов, Драган С. Димитровски

Нека е даден диференцијалниот оператор

$$P(D) = D^{3n} + 3B_{2n}(x)\, D^{2n} + \sum_{j=0}^{2n-1} B_j(x)\, D^j \left(D \equiv \frac{d}{dx}\right), \tag{1}$$

каде што $B_j(x)$ $(j = \overline{0, 2n})$ се полиноми од степен b_j.

Претпоставувајќи дека за броевите b_{2n}, b_n и b_0 важи

$$b_{2n} < b_0/6, \quad b_n < b_0/3, \tag{2}$$

ќе ги најдеме потребните и доволни услови под кои операторот (1) се факторизира на облик

$$P(D) = (D^n + \alpha(x))\ (D^{2n} + + \beta(x)\ D^n + \gamma(x)), \tag{3}$$

каде што $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ се исто така полиноми.

Од условот за еднаквост на (1) и (3), наоѓаме

$$\alpha = B_{2n} + y, \quad \beta = 2\, B_{2n} - y, \quad \gamma = y^2 - B_{2n}\, y + y^{(n)} + M,$$

$$B_{n+k} = \binom{n}{k} (2\, B_{2n} - y)^{(n-k)} \qquad (k = \overline{1, n-1}),$$

$$B_i = \binom{n}{i} (y^2 - B_{2n}\, y + y^{(n)} + M)^{(n-i)} \left(i = \overline{1, n-1};\ y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}\right), \tag{4}$$

каде што функцијата $y(x)$ е определена со равенката

$$\begin{gathered} y^3 + (M - B_{2n}^2)\ y + (y^2 - B_{2n}\, y)^{(n)} + y y^{(n)} + B_{2n}\, y^{(n)} + y^{(2n)} = \Delta; \\ M = B_n - 2B_{2n}^2 - 2B_{2n}^{(n)};\ \ \Delta = B_0 - B_{2n}\, M - M^{(n)}. \end{gathered} \tag{5}$$

ЛЕМА. 1 Операторот (1) има облик (2) ако и само ако

(i) равенката (5) има барем едно полиномно решение $y = y(x)$;

(ii) полиномите $B_i(x)$, $B_{n+k}(x)$ $(i, k = \overline{1, n-1})$ се дадени со (4).

Степените на полиномните решенија на (5) се исти како и на равенката

$$y^3 + (M - B_{2n}^2)\, y + y^{(2n)} = \Delta.$$

Врз основа на резултатите најдени во [2], последната равенка, за која е исполнето (2), може да има полиномни решенија само од степен $m = b_0/3$. Ако е пак b_0 мултипл од 3 тогаш, на потполно аналоген начин како и во [1], се покажува дека равенката (5) можат да ја задоволат само полиномите

$$y = \omega_t\, S, \tag{6}$$

каде што ω_t (t = 1, 2, 3) се корени на равенката $\omega^3 = 1$, а S-цел рационален-дел од развојот на $\sqrt[3]{\Delta(x)}$ по цели степени од x. Ако дефинираме

$$\Delta = S^3 + Q; S = [\sqrt[3]{\Delta}], \tag{7}$$

тогаш важи следниот резултат.

ЛЕМА 2. Нека е исполнето (2) и нека е b_0 мултипл од 3. Тогаш равенката (5) има полиномни решенија ако и само ако за некое $1 \leqslant t \leqslant 3$ важи

$$(M - B_{2n}^2)\, S + (\omega_t S^2 - B_{2n}\, S)^{(n)} + (\omega_t S + B_{2n})\, S^{(n)} + S^{(2n)} = Q/\omega_t. \tag{8}$$

Доказ. Ако (6) се замени во (5) тогаш, врз основа на (7), лесно се добива (8). Обратно, ако важи релацијата (8), тогаш

$$(\omega_t S)^3 + (M - B_{2n}^2)\,(\omega_t S) + \{(\omega_t S)^2 - B_{2n}(\omega_t S)\}^{(n)} + $$
$$+ (\omega_t S + B_{2n})\,(\omega_t S^{(n)}) + \omega_t S^{(2n)} = S^3 + Q = \Delta,$$

што значи дека (6) е решение на равенката (5). Од (6) и (4) излегува

$$\begin{aligned} B_{n+k} &= \binom{n}{k}(2\, B_{2n} - \omega_t S)^{(n-k)} \qquad (k = \overline{1, n-1}); \\ B_i &= \binom{n}{i}(\omega_t^2\, S^2 - \omega_t\, B_{2n}\, S + \omega_t S^{(n)} + M)^{(n-i)} \qquad (i = \overline{1, n-1}). \end{aligned} \tag{9}$$

Од лемите 1 и 2 непосредно следи

ТЕОРЕМА. Нека е исполнето (2) и нека е b_0 мултипл од 3. Тогаш операторот (1) се факторизира на обли (3) ако и само ако за некое $1 \leqslant t \leqslant 3$

(а) важи релацијата (8);

(б) полиномите B_{n+k}, B_i $(i, k=\overline{1, n-1})$ се дадени со (9). Притоа полиномите $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ се дадени како

$$\alpha = B_{2n} + \omega_t S, \quad \beta = 2B_{2n} - \omega_t S,$$

$$\gamma = \omega_t^2 S^2 - \omega_t B_{2n} S + \omega_t S^{(n)} + M.$$

Ако (2) важи, а b_0 не е мултипл од 3, тогаш операторот (1) н може да се факторизира на облик (2).

За $n=1$ од теоремата излегува резултатот најден во [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Р. Лазов, Д. С. Димитровски: Билтен на ДМФ од СРМ, кн. XXV, 7—8.
2. M. Bhargava, H. Kaufman: Collect. Math. 17, 1965, 135—143.
3. П. Р. Лазов: Математички весник, кн. 13 (28), св. 3 (1976), 289—293.

Пешар Р. Лазов, Драган С. Димишровски

ФАКТОРИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Резюме

В этой работе найдены необходимые и достаточные условия при которых дифференциальный оператор (1) факторизуется в виде (3)