ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕРО

Петар Р. Лазов

Дифференциальное уравнение

$$(1) \qquad A(x)y = \sum_{k=0}^{n} B_{v_k}(x)\,(y')^{v_k}, \qquad y' = \frac{dy}{dx},$$

где $A(x)$ и $B_{v_k}(x)$ $(k = \overline{0, n})$-полиномы степени a, соответственно b_{v_k}, имея в виду, что $y' = \dot{y}/\dot{x}$, можно написать в виде

$$(1a) \qquad (A\dot{x}^{v_n})\, y = \sum_{k=0}^{n} \{B_{v_k}(x)\dot{x}^{v_n - v_k}\}\dot{y}^{v_k}.$$

Если предположим что уравнение (1a) имеет параметрическое решение вида

$$(2) \qquad x = F_r(t), \quad y = \Phi_m(t) \quad (r, m = 1, 2, \ldots),$$

где $F_r(t)$, $\Phi_m(t)$-полиномы од t с степенью r, соответственно m, тогда это уравнение примимает вид

$$(3) \qquad A^*(t)\, y = \sum_{k=0}^{n} B^*_{v_k}(t)\,\dot{y}^{v_k}.$$

Здесь полиномы $A^*(t)$ и $B^*_{v_k}(t)$ определены как

$$A^*(t) = A(F_r(t)) \cdot \dot{F}_r(t)^{v_n}; \quad B^*_{v_k}(t) = B_{v_k}(F_r(t)) \cdot \dot{F}_r(t)^{v_n - v_k}.$$

Таким же образом как и в [2], где рассмотрено дифференциальное уравнение типа Рикати, возможные значения для чисел m и r находятся из условия, чтобы между числами

$$ar + v_n(r-1) + m,$$

$$rb_{v_k} + (r-1)(v_n - v_k) + v_k(m-1) \quad (k = \overline{o, n}),$$

существовали хотя бы два равные между собой:

$$(4) \qquad m = r\left(\frac{b_{v_i} - b_{v_j}}{v_j - v_i} + 1\right) \quad (i = \overline{o, n-1};\ j > i)$$

$$(5) \qquad m = r\,\frac{a + v_k - b_{v_k}}{v_k - 1} \qquad (k = \overline{o, n};\ v_k \neq 1).$$

Возможен и так называемый „особый случай“

$$(6) \qquad m = r\,\alpha/\beta_1,$$

где α и β_1-коэффициенты членов с степенью a, соответственно b_1, полиномов $A(x)$ и $B_1(x)$.

ТЕОРЕМА 1. Дифференциальное уравнение (1) может иметь только такие решения вида (2), для которых числа m и r связаны некоторым из соотношений (4), (5) или (6).

2. Если предположим, что числа m и r связаны только одним из соотношений (4) и что выполняются условия

$$b_{\nu_k} < \frac{b_{\nu_i}(\nu_j - 1 - \nu_k) + b_{\nu_j}(\nu_k + 1 - \nu_i)}{\nu_j - \nu_i} - \frac{r-1}{r} \quad (k = \overline{o, n}; k \neq i, j) \tag{7}$$

$$a + 1 < \frac{(\nu_j - 2)\, b_{\nu_i} + (2 - \nu_i)\, b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} - \frac{r-1}{r} \tag{8}$$

тогда, таким же способом как и в [1], показывается, что уравнение (3) может быть удо летворено только когда

$$y = \Phi_m = \omega_l\, IS + c, \tag{9}$$

где $Ix^k = x^{k+1}/(k+1)$, c-константа, S-целая рациональная часть разложения $\sqrt[q]{-B^*_{\nu_i}(t)/B^*_{\nu_j}(t)}$ по целым убывающим степеням t, а ω_l $(l = \overline{1, q})$-корни уравнения $\omega^q = 1$. Определяя еще полином Q как

$$-B^*_{\nu_i} = B^*_{\nu_j}\, S^q + Q \qquad (q = \nu_j - \nu_i), \tag{10}$$

приходим к следующему результату

ТЕОРЕМА 2. Уравнение (1), для которого выполняются условия (7) и (8), имеет решения вида (2) тогда и только тогда, когда для некотоорго $1 \leqslant l \leqslant q = \nu_j - \nu_i$ существует константа c такая, что

$$\Phi_m = \omega_l\, IS + c \tag{I}$$

$$A^* \cdot (\omega_l\, IS + c) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^{n} B^*_{\nu_k} \cdot (\omega_l S)^{\nu_k} - Q \cdot (\omega_l S)^{\nu_i}. \tag{II}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Р. Лазов, Д. С. Димитровски: Годишен Зборник на ПМФ, кн. 25—26, 1975/76.
2. П. Р. Лазов: Билтен на ДМФ од СРМ, Кн. XXV, 1974, 9—10.

Резиме

Во овој труд се најдени потребните и доволни услови под кои равенката (1) има решенија од видот (2).