Математички Билтен
Книга 3—4 (XXIX—XXX), 1979—1980, (14—25)
Скопје — Југославија

ЗА РЕДУКТИБИЛНОСТА НА НЕЛИНЕАРНИТЕ ДИФЕРНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Елена С. Атанасова, Драган С. Димитровски

Целта на овој труд е да покажеме дека постапката на Еругин-Пејовиќ, поставена за линеарните диференцијални равенки и системи [1], [2]; може да се пренесе и на алгебарските диференцијални равенки. Ќе ги докажеме следните две теореми:

Теорема 1. За секоја нелинеарна диферцијална равенка од прв ред и произволна цела степен N

$$\sum_{\substack{n,\, m=0,0 \\ n+m\leqslant N}}^{N} a_{1nm}(x)\,(y')^n\, y^m = 0, \quad a_{1N0} = 1 \tag{1}$$

постои една подкласа равенки која зависи од еден произволен функционален коефициент $a_{10N}(x)$ и од

$$\frac{(N+1)(N+2)}{2} - 1 \tag{4}$$

произволни константи:

$$\begin{aligned} &\alpha_{1N0} = 1;\ \alpha_{1,\,N-1,1};\ \alpha_{1,N-1,0};\ \alpha_{1,N-2,2};\ \alpha_{1,N-2,1};\ \alpha_{1,N-2,0};\ \ldots; \\ &\alpha_{1,0,N-1};\ \ldots;\ \alpha_{100}, \end{aligned} \tag{5}$$

која подкласа, ако е исполнет потребниот услов на Еругин-Пејовиќ

$$t = \frac{1}{\sqrt[N]{C}} \int \sqrt[N]{a_{10N}(x)}\, dx, \tag{6}$$

со смената $x = x(t)$ на независно променливата се сведува на равенка со константни коефициенти

$$(2) \qquad \sum_{\substack{n,m=0,0 \\ n+m \leqslant N}}^{N} \alpha_{1nm} \, (\dot{y})^n \, y^m = 0.$$

Доказот е скоро очевиден. Со смената $x = x(t)$, $y = y(t)$ првиот извод y'_x изнесува $\frac{1}{\dot{x}} \dot{y}$, и според тоа бројот на собироците во (1) не се менува со смената. Ја имаме следната трансформација на равенките

$$(1) \qquad \sum_{\substack{n,m=0,0 \\ n+m \leqslant N}}^{N} a_{1nm} \, (x) \, (\dot{y})^n \, y^m = 0 \longrightarrow \sum_{\substack{n,m=0,0 \\ n+m \leqslant N}}^{N} \alpha_{1nm} \, (\dot{y})^n \, y^m = 0 \qquad (2)$$

каде

$$(3) \quad \alpha_{1nm} = \frac{a_{1nm}(x)}{\dot{x}^n}$$

Лесно со индукција се уверуваме дека бројот на собироците, т. е. на коефициентите $a_{1nm}(x)$ и α_{1nm} изнесува $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$.

Како највисокиот коефициент по претпоставка е 1, тоа по ослободувањето од $\dot{x}^N$ пред највисокиот член и барањето на најмал заеднички содржател, добиваме дека и $\alpha_{1N0} \equiv 1$, и значи бројот на коефициентите (5) е даден со (4).

Од условот (3) да се α_{1nm} константнти

$$\alpha_{1nm} = C_{nm},$$

од последната равенка го добиваме потребниот услов (6). Во него новата независно променлива зависи само од еден коефициент на (1), имено последниот. Како структурата на системот (3) е таква секој еден α да зависи само од еден соодветен a (x), тоа со примена на (6) секој $a_{1nm}(x)$ може да се изрази само со конкретниот $a_{10N}(x)$, што обезбедува (2) да има константни коефициенти. Со ова е докажано тврдењето на теоремата 1.

Теорема 2. Нелинеарната диференцијална равенка од k-*ти* ред и произволна цела степен N

$$\sum_{\substack{m,\ n,\ \ldots,\ p,\ r=0,\ \ldots,\ 0\\ m+n+\ldots+p+r\leqslant N}}^{N} a_{kmn\ldots pr}(x)\ {y^{(k)}}^{m}\ {y^{(k-1)}}^{n}\ldots (y')^{p}\, y^{r}=0;\quad a_{kN0\ldots 0}(x)\equiv 1 \tag{7}$$

содржи барем една подкласа равенки која зависи од еден произволен функционален параметар $a_{k0\ldots 0N}(x)$ и од $N_1=\sum\limits_{m=1}^{N} \overline{C}^{m}_{k+1}$ ($\overline{C}^{m}_{k+1}$ — комбинации со пвторување од $k+1$ елементи од m-*та* класа) произволни константи, која, ако е исполнет потребниот услов на Еругин-Пејовиќ:

$$t=\frac{1}{\sqrt[kN]{\alpha_{N_1}}}\int \sqrt[kN]{a_{N_1}(x)}\,dx, \tag{12}$$

се сведува со смената на независно променливата $x=x(t)$, $y=y(t)$ на равенка со константни коефициенти

$$\sum_{\substack{m,\ n,\ldots,p,\ r=0,0,\ldots,0\\ m+n+\ldots+p+r\leqslant N}}^{N} \alpha_{k\ldots pr}\left(\overset{(k)}{y}\right)^{m}\left(\overset{(k-1)}{y}\right)^{n}\ldots(\dot{y})^{p}\, y^{r}(t)=0 \tag{9}$$

и според тоа за таа подкласа (9) од (7) постои можност за редукција на степенот и алгебарско решавање.

Доказот се базира на теоремата 1 и претставува воопштување. Нека е дадена равенката (7), равенка од произволен k-ти ред и произволна степен N, т. е. равенка во вид на збир од сите можни продукти на функцијата y и нејзините изводи $y^{(\nu)}(x)$, така што вкупниот степен на секој производ да не го надмине N. Ако извршиме смена прво само на независно променливата $x=x(t)$, со индукција може лесно да се докаже дека сите изводи $y_{x^\nu}^{(\nu)}$ се линеарни функции од новите изводи $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots, \overset{(\nu)}{y}$:

$$y'_x=\frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

$$y''_{xx} = \frac{1}{\dot{x}^2}\ddot{y} - \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^3}\dot{y},$$

$$y'''_{xxx} = \frac{1}{\dot{x}^3}\dddot{y} + \ldots$$

— — — — — — — — — —

$$\overset{(n)}{y}_{x^n} = \frac{1}{\dot{x}^n}\overset{(n)}{y} + f_1 \overset{(n-1)}{y} + \ldots + f_n \dot{y}$$

каде $f_1, f_2, \ldots, f_n$ се алгебарски функции од $\dot{x}, \ddot{x}, \ldots, \overset{(n)}{x}$, т. е.

$$\overset{(v)}{y}_{x^v} = L_v\left(\overset{(v)}{y}, \overset{(v-1)}{y}, \ldots, \ddot{y}, \dot{y}\right),$$

каде L_v е линеарна функција од v агрументи, со коефициенти функции од $\overset{(v)}{x}$. Така ја имаме следната трансформација:

$$\sum_{\substack{m,\ldots,p,r=0,0,\ldots,0\\ m+\ldots+p+r\leqslant N}}^{N} a_{kmn\ldots pr}(x)\left(\overset{(k)}{y}\right)^m\left(\overset{(k-1)}{y}\right)^n\ldots(y')^p y^r = 0 \rightarrow \tag{7}$$

$$\sum_{\substack{m,\ldots,p,r=0,\ldots,0\\ m+\ldots+p+r\leqslant N}}^{N} a_{km\cdot\ldots pr}(x(t))L_k^m(t)\,L_{k-1}^n(t)\ldots L_1^p(t)\,L^r(t) = 0. \tag{8}$$

Извршувајки ги сите степенувања $L^M(t)$, во линеарните збирови $L_v(t)$, применувајки ја во начело Њутновата биномна формула, соодветните развои ќе ги содржат сите комбинации од производите меѓу:

$$\left(\overset{(v)}{y}\right)^{p_1}\left(\overset{(v-1)}{y}\right)^{p_2},\ldots(\dot{y})^{p_{M-1}}\,y^{p_M}$$

така да е $p_1 + p_2 + \ldots + p_M = M$

По меѓусебното множење на факторите $L_v^M(t)$ во трансформираната равенка, ситуацијата нема битно да се измени, и трансформатот (8) ќе содржи исти комбинации од степените од $(\overset{V}{y})$, y како и (1), Имаме

$$\sum_{\substack{m, n, \ldots, p, r = 0,0, \ldots 0 \\ m + \ldots + p + r \leqslant N}}^{N} \alpha_{kmn \ldots pr} \left(t; a_{k \ldots r} (x(t)) \right) \left(\overset{(k)}{y} \right)^{m} \left(\overset{(k-1)}{y} \right)^{n} \ldots \left(\dot{y} \right)^{p} y^{r}{}_{(t)} = 0 \tag{10}$$

каде $\alpha_{knm \cdots pr}$ зависат од $a_{kn \cdots pr}(x)$ линеарно, а нелиниарно од x, $\dot{x}, \ldots, \overset{(N)}{x}$ т. е. равенката (9) е од истиот тип како и (7), и е со ист број на членови.

Ако поставиме услов за константни коефициенти

$$\alpha_{k \ldots r} = \text{const.} = C_{k \ldots r} \tag{11}$$

добиваме линеарен систем равенки со онолку непознати, колку има и равенки, бидејќи бројот на коефициентите $\alpha_{k \ldots r}$ се поклопува со бројот на коефициентите во (7) $a_{k \ldots r}(x)$. Од (10) при условот (11) се добива (9), Во системот линеарни равенки (11) секогаш постои една најпроста, и со иста форма, без обзир на N. Тоа е онаа равенка кога во последниот, слободниот член се земе

$$a_{00 \cdots N}(x) \cdot (\dot{x})^{kN} = \alpha_{00 \cdots N}$$

или покусо:

$$a_{N_1}(x) \left(\frac{dx}{dt} \right)^{kN} = \alpha_{N_1}$$

од каде веднаш го добиваме условот (12). Од линеарните равенки (11) со примена на (12), добиваме дека секој $a_{k \ldots r}(x)$ зависи само од последниот $a_{N_1}(x)$ за (9) да биде со константни коефициенти. Така е определена подкласата равенки која се трансформира на равенки со константни коефициенти, и теоремата 2 е докажана.

ПРИМЕНА. Теоремите имаат практична смисла најповеќе до четврта степен, кога можеме експлицитно да решиме по највисокиот извод, евентуално да разделиме променливи и да добиеме квадратурно решение. Тоа го направивме, за илустрација, за равенки од прв и втор ред и I, II, III и IV степен.

1. Линеарната равенка од прв ред и прва степен

$$C_2 y' + C_1 \, b(x) \, y + b(x) = 0,$$

каде $b(x)$ е произволна функција, со смената $x = x(t)$ се трансформира на равенка со константни коефициенти.

2. Равенката од прв ред и втора степен:

$$y'^2 + a(x)(k_1 + k_2 y)\, y' + a^2(x)(k_3 y^2 + k_4 y + 1) = 0,$$

каде $a(x)$ е произволна функција; k_1, k_2, k_3, k_4 се произволни константи, со смената $x = x(t)$ се трансформира на равенка со константни коефициенти

$$y'^2 + \varepsilon y y' + \delta y^2 + \gamma y + \beta y' + \alpha = 0$$

и според тоа може да се реши со квадратури

$$\frac{dy}{y + \beta \pm \sqrt{Ay^2 + By + C}} = dx$$

3. Во класата алгебарски равенки од прв ред и трета степен

$$\sum_{\substack{m,n=0,0\\ m+n\leqslant 3}}^{3,3} a_{1nm}\,(x)\,(y')^n\, y^m = 0$$

постои една подкласа која зависи од еден слободен функционален параметар $a_{100}\,(x)$ и од 9 произволни константи; која ако е исполнет условот

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{k_9}} \int \sqrt[3]{a_{160}\,(x)}\; dx$$

се сведува на равенка со константни коефициенти. Имено равенката

$$y'^3 + \sqrt[3]{A(x)}\,[k_1 y'^2 y + k_2 y'^2] + \sqrt[3]{A^2(x)}\,[k_3 y' y^2 + k_4 y' y + k_5 y'] +$$
$$+ A(x)\,[k_6 y^3 + k_7 y^2 + k_8 y + k_9]$$

е сводлива на равенка со константни коефициенти, па според тоа може да се реши со квадратури.

4. Слично можеме да кажеме за равенките од прв ред и четврта степен. Имено равенката

$$y'^4 + \sqrt[4]{A(x)}\,[k_1 y'^3 y + k_2 y'^3] + \sqrt[4]{A^2(x)}\,[k_3 y'^2 y^2 + k_4 y'^2 y + k_5 y'^2] +$$
$$+ \sqrt[4]{A^3(x)}\,[k_6 y' y^3 + k_7 y' y^2 + k_8 y' y + k_9 y'] +$$
$$+ A(x)\,[k_{10} y^4 + k_{11} y^3 + k_{12} y^2 + k_{13} y] + A(x) = 0,$$

каде $A(x)$ е произволна функција; k_i $(i = 1,2, \ldots, 13)$ се произволни константи, е сводлива на равенка со константни коефициенти.