Год. збор. Матем. фак.
30 (57—63) 1979

ЗА ЕДЕН НАЧИН НА ПРИМЕНУВАЊЕ НА КВАДРАТУРНИТЕ ФОРМУЛИ ПРИ НУМЕРИЧКО РЕШАВАЊЕ НА ОБИЧНИТЕ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

В. Бабинкостов

Во оваа работа, запишувајќи ги пресметувањата извршувани со помош на една или друга квадратурна формула во една векторно-матрична форма, се проширува укажаниот во [3] начин на нумеричко решавање на обичните линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти со тоа што истиот се пренесува на такви равенки со променливи коефициенти.

Нека е дадена функцијата $f \in C\{[0,1]\}$ со вредности $f_i = f(x_i)$ во еднаквооддалечените точки-јазли $x_i = ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ nh = 1)$ на оската на аргументот $x \in [o,1]$. Пресметувајќи ги во истите точки вредностите $y_i = y(x_i)$ на функцијата

$$y(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \tag{1}$$

со помош на една или друга квадратурна формула, се добива

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, f(x_j) + r_i \quad (y_0 = 0) \tag{2}$$

каде α_{ij} се некои коефициенти, r_i — соодветни остаточни членови, односно

$$Y = AF + R, \tag{3}$$

каде $Y = \text{colon}\,(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, $F = \text{colon}\,(f_0, f_1, \ldots, f_n)$, $R = \text{colon}\,(r_0, r_1, \ldots, r_n)$ се вектори-колони, а A е матрица од облик

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

па во таа смисла ние зборуваме за (3) како за матрично-квадратурна формула која по испуштање на векторот-остаток R, со точност нему еднаква, овозможува приближно наоѓање на вредностите y_i, примајќи

$$Y \approx AF \tag{5}$$

Притоа, користењето на таквите формули значително се олеснува благодарејќи на тоа што при нивно повеќекратно применување соодветните матрици се множат, т.е. ако на таков начин се пресметуваат вредностите $w_i = w\ (x_i)$ на функцијата

$$w\ (x) = \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} f\ (t_m)\ dt_m, \tag{6}$$

за векторот $W = \text{colon}\ (w_0,\ w_1, \dots,\ w_n)$ се добива

$$W \approx A_1\ A_2 \dots\ A_m\ F, \tag{7}$$

каде $A_1,\ A_2, \dots,\ A_m$ се матрици, соодветни на применуваните квадратурни формули, односно

$$W \approx A^m\ F \tag{8}$$

при $A_1 = A_2 = \dots = A_m = A$.

Нека е сега дадена линеарната диференцијална равенка

$$y' + a\ (x)\ y = f\ (x), \tag{9}$$

која при познати функции $a,\ f \in C\ \{[0,1]\}$ од аргументот $x \in [0,1]$ има единствено решение $E \in C^{(1)}\ \{[0,1]\}$ што го задоволува почетниот услов

$$y(0) = y_0. \tag{10}$$

Интегрирајќи ги обете страни на дадената равенка (9) во граници од 0 до $x \in [0,1]$, со оглед на (10), можеме да запишеме

$$y + \int_0^x a(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + y_0. \tag{11}$$

Пресметувајќи ги интегралите во последното равенство со помош на некоја матрично-квадратурна формула, претставена при избрани јазли $x_i = ih$ со матрицата A, добиваме

$$Y + AY_1 = AF + Y_0\, I + R, \tag{12}$$

каде, покрај веќе укажаните вектори-колони Y, F, R и векторот-колона $I = \text{colon}\ (1,1,\ldots,1)$ со иста димензија, е $Y_1 = \text{colon}\ (a_0\, y_0, a_1 y_1, \ldots, a_n\, y_n)$, $a_i = a\,(x_i)$. Но $Y_1 = D_1\, Y$, каде $D_1 = [\delta_{ij}\ a_i]$ $(i, j = 0,1,\ldots, n)$

е дијагонална матрица при вообичаени вредности

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

па се добива

$$(E + AD_1)\ Y = AF + Y_0\ I + R \tag{13}$$

при единична матрица $E = [\delta_{ij}]$, од каде, по испуштање на векторот-остаток R, ставајќи

$$B_1 = E + AD_1$$

и допуштајќи да е $\det B_1 \neq 0$, наоѓаме

$$Y \approx B_1^{-1}\ (AF + Y_0\ I). \tag{14}$$

Аналогно, имајќи ја равенката

$$y'' + a\,(x)\ y' + b\,(x)\ y = f\,(x), \tag{15}$$

која при дадени функции $a \in C^{(1)}\ \{[0,1]\}$, $b, f \in C\ \{[0,1]\}$ има единствено решение $y \in C^{(2)}\ \{[o,1]\}$ што ги задоволува почетните услови

$$y\,(0) = y_0,\ y'\,(0) = y_0', \tag{16}$$

по две последователни интегрирања, се добива

$$y+\int_0^x\int_0^t (b\ (s)-a'\ (s))\ y\ dsdt+\int_0^x a\ (t)\ y\,dt=$$

$$=\int_0^x\int_0^t f\ (s)\ dsdt+\int_0^x (y_0'+a(0)\ y_0)\ dt+y_0. \qquad (17)$$

Пресметувајќи ги и тука интегралите со помош на некоја матрично-квадратурна формула, претставена при избрани јазли $x_i = ih$ со матрицата A, можеме да запишеме

$$Y+AY_1+A^2\ Y_2=A^2\ F+(y_0'+a\ (0)\ y_0)\ AI+Y_0\ I+R, \qquad (18)$$

каде, освен укажаните порано вектори, е $Y_2=\text{colon}\ ((b_0-a_0')\ y_0, (b_1-a_1')\ y_1, \ldots, (b_n-a_n')\ y_n)$, $a_i'=a'(x_i)$, $b_i=b\ (x_i)$, Но. заедно со $Y_1=D_1\ Y$ е $Y_2=D_2\ Y$ при дијагонална матрица $D_2=[\delta_{ij}\ (b_i-a_i')]$, па се добива

$$(E+AD_1+B^2\ D_2)\ Y=A^2\ F+(y_0'+a_0\ y_0)\ AI+Y_0\ I+R, \qquad (19)$$

од каде, како и порано, по испуштање на векторот-остаток R, ставајќи

$$B_2=E+AD_1+A^2\ D_2$$

и допуштајќи да е $\det\ B_2\neq 0$, наоѓаме

$$Y\approx B_2^{-1}\ (E+AD_1+A^2\ D_2). \qquad (20)$$

Во поопшт случај, нека се разгледува линеарната диференцијална равенка од m-ти ред

$$y^{(m)}+\sum_{v=1}^{m} a_v\ (x)\ y^{(m-v)}\equiv y^{(m)}+a_1\ (x)\ y^{(m-1)}+\ldots+a_m\ (x)\,y=$$

$$=f(x), \qquad (21)$$

која при дадени функции $a_v\in C^{(m-v)}\ \{[0,1\}$, $f\in C\ \{[0,1]\}$ има единствено решение $y\in C^{(m)}\ \{[0,1]\}$ во интервалот $[0,1]$ што ги задоволува почетните услови

$$y^{(m-v)}\ (0)=y_0^{(m-v)}\ (v=1,2,\ldots,m). \qquad (22)$$

Интегрирајќи ги обете страни на дадената равенка последователно m пати во граници од 0 до $x \in [0,1]$ и издвојувајќи ја по секое интегрирање функцијата y под знакот на интеграл, а со оглед на условите (22), може да се запише (22)

$$y + \sum_{v=1}^{m} \int_0^{x=t_0} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{v-1}} p_v \, y dt_v \dots dt_2 \, dt_1 =$$

$$= \int_0^x \int_0^{t_1} \int_0^{t_{m-1}} f dt_m \dots dt_2 \, dt_1 + \tag{23}$$

$$+ \sum_{v=1}^{m-1} (y_0^{(v)} + q_v(0)) \int_0^{x=t_0} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{v-1}} dt_v \dots dt_2 \, dt_1 + y_0,$$

каде, барем при $m = 1, 2, \dots, 7$ е

$$(p) \begin{cases} p_1 = p_1, \\ p_2 = a_2 - (m-1) \, a_1' \\ p_3 = a_3 - (m-2) \, a_2' + \dfrac{1}{3} (m-1)(m-2) \, a_1'' \\ p_4 = a_4 - (m-3) \, a_3' + \dfrac{1}{2} \, (m-2) \, (m-3 \;\; a_2'' - \\ - \dfrac{1}{2} ((m-2)(m-3) + \dots + 3.2 + 2.\;1) \;\; a_1''', \\ p_5 = a_5 - (m-4) \;\; a_4' + \dfrac{1}{2} \, (m-3) \;\; (m-4) \;\; a_3'' - \\ - \dfrac{1}{2} ((m-3)(m-4) + \dots + 3.2 + 2.1) \, a_2''' + \\ + \dfrac{1}{2} ((m-4)\;(m-5) + 2(m-5)\;(m-6) + \dots + (m-5).3.2 + \\ + (m-4).2.1) \, a_1^{(4)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{m-1} = a_{m-1} - 2a_{m-2}' + 3 \, a_{m-3}'' - \dots + (-1)^{m-2} \, a_1^{(m-2)}, \\ p_m = a_m - a_{m-1}' + a_{m-2}'' - \dots + (-1)^{m-1} \;\; a_1^{(m-1)}, \end{cases}$$

$$
(q)\begin{cases}
q_1(0) = a_1(0)\; y_0, \\
q_2(0) = a_1(0)\; y_0' + (a_2(0) - (m-2))\; a_1'(0)\; y_0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
q_{m-5}(0) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{s=1}^{m-5} \sum\limits_{k=0}^{s-1} \sum\limits_{r=0}^{k} (-1)^r\; (r+1)\; (k-r+2)\; (k-r+ \\
\quad +1)\; a_{s-k}^{(k)}(0)\; y_0^{(m-s-5)}, \\
q_{m-4}(0) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{s=1}^{m-4} \sum\limits_{k=0}^{s-1} \sum\limits_{r=0}^{k} (-1)^r\; (k-r+2)\; (k-r+ \\
\quad +1)\, a_{s-k}^{(k)}(0)\; y_0^{(m-s-4)}, \\
q_{m-3}(0) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{s=1}^{m-2} \sum\limits_{k=0}^{s-1} (-1)^k\, (k+1)\; (k+2)\; a_{s-k}^{(k)}(0)\, y_0^{(m-s-3)}, \\
q_{m-2}(0) = \sum\limits_{s=1}^{m=2} \sum\limits_{k=0}^{s-1} (-1)^k\; (k+1)\; a_{s-k}^{(k)}(0)\; y_0^{(n-s-2)}, \\
q_{m-1}(0) = \sum\limits_{s=1}^{m-1} \sum\limits_{k=0}^{s-1} (-1)^k\; a_{s-k}^{(k)}(0)\; y_0^{(m-s-1)}.
\end{cases}
$$

Пресметувајќи ги сега интегралите во (23) со помош на некоја матрично-квадратурна формула, претставена при избрани јазли $x_i = ih$ со матрицата A, согласно (8), можеме да запишеме

$$
Y + \sum_{v=1}^{m} A^v\; Y_v = A^m\; F + \sum_{v=1}^{m-1} (y_0^{(m-v)} + q_{m-v}(0))\, A^{m-v}\, I +
$$

$$
+ Y_0\, I + R, \tag{24}
$$

каде при укажани порано други вектори е $y_v = \text{colon}\,(p_{v0}\; y_0, p_{v1}\; y_1, \dots$ $\dots, p_{vn}\, y_n)$, $p_{vi} = p\,(x_i)$. Но $Y_v = D_v\, Y$ при дијагонална матрица $D_v = [\delta_{ij}\;\; p_{vi}]$ со елементи p_{vi} по дијагоналата, на затоа може да се запише

$$
(E + \sum_{v=1}^{m} A^v\, D_v)\;\; Y = A^m\, F + \sum_{v=1}^{m-1} (y_0^{(m-v)} + q_v(0))\, A^{m-v}\, I + y_0\, I + R, \tag{25}
$$

од каде, по испуштање на векторот-остаток R, ставајќи

$$B_m = E + \sum_{v=1}^{m} A^v \ D_v,$$

и допуштајќи да е $det B_m \neq 0$, наоѓаме

$$Y \approx B_m^{-1} \left\{ A^m \ F + \sum_{v=1}^{m-1} (y_0^{(v)} + q_v \ (0)) \ A^v \ I + y_0 \ I \right\}. \tag{26}$$

Притоа, допуштениот услов $det B_m \neq 0$ може секогаш да се обезбеди за сметка на изборот на чекорот h, посебно во случај на матрици A од триаголен вид, кон кои најчесто доведуваат познатите квадратурни формули, а решавањето на конкретни примери покажува дека се добиваат резултати со задоволителна точност која, се разбира, во значителна мерка зависи од точноста со која е извршена инверзијата на соодветната матрица.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений I. Физматгиз, М., 1959

[2] Нестерчук А. Б., О решении обыкновеных линейных дифференциальных уравний с помощью операторов численного интегрирования, УМЖ 17, 4, К., 1965

[3] Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1950.

]4] Эльсгольц Л. Э., Дифференциальные уравнения и вариационое исчисление, ,,Наука", М., 1966

В. Бабинкосшов

ОБ ОДНОМ ПРИЕМЕ ПРИМЕНЕНИЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРВАНЕНИЙ

Резюме

В работе, расмотренный в]2] прием численого решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, заснованный на применении квадратурных формул в их векторно-матричной форме, переносится на такие же уравнения с переменными коэффициентами, причем даны соответствующие формулы для уравнений порядков $m = 1, 2, \ldots, 7$.