3-(V, 4, 1) БЛОКШЕМИ И 3-КВАЗИГРУПИ

Александар Самарџиски

1. Увод

Кај Холл [2], стр. 329, докажана е следнава теорема: Ако постојат штајнерови тројки со ν_1 елементи и штајнерови тројки со ν_2 елементи, тогаш постојат и штајнерови тројки со $\nu_1 \nu_2$ елементи. Во оваа работа се докажува дека оваа теорема важи и за 3-(ν, 4, 1) блокшеми.

Една конечна инцидентна структура $\mathcal{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{I})$ се наречува t — (ν, κ, λ) блокшема, ако:

(а) $\nu = |\mathbf{P}|$;

(б) На секој блок лежат точно κ точки;

(в) Низ t различни точки минуваат точно λ блокови.

Штајнеровите троки со ν елементи претставуваат 2-(ν, 3, 1) блокшеми, па спомнатата теорема може да се форулира на следниов начин: Ако постојат 2-(ν_1, 3, 1) и 2-(ν_2, 3, 1) блокшеми, тогаш постои и 2-(ν_1 ν_2, 3, 1) блокшема. Во оваа работа ќе ја докажеме следнава теорема:

Теорема. *Ако $\mathcal{D}_1$ е 3-(ν_1, 4, 1) блокшема, а $\mathcal{D}_2$ е 3-(ν_2, 4, 1) е блокшема, тогаш постои 3-(ν_1 ν_2, 4, 1) блокшема $\mathcal{D}$, којашто содржи потструктура изомофна со $\mathcal{D}_1$ и потструктура изоморфна со $\mathcal{D}_2$.*

2. Врска меѓу 3-(ν, 4, 1) блокшемите и 3-квазигрупите

Во секоја 3-(ν, 4, 1) блокшема блоковите можеме да ги разгледуваме како множества точки, а релацијата за инцидентност како обична припадност.

Навистина, нека $\mathbf{P}$ е едно ν-множество; ако $\mathbf{B}$ е подмножество од $\mathcal{P}_4$ ($\mathbf{IP}$) што го задоволува условот:

(i) за кои било три елемента $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{P}$ постои единствен елемент $x_4 \in \mathbf{P}$, така што $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \in \mathbf{B}$,

тогаш инцидентната структура ($\mathbf{P}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{I}$) е една 3-(ν, 4, 1) блокшема. Ако, пак, $\mathcal{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{I})$ е произволна 3-(ν, 4, 1) блокшема и ако за секој блок $b \in \mathbf{B}$ ставиме

$$B_b = \{\{x_1, x_2, x_3\, x_4\} \mid x_i\, b,\ \ i = 1, 2, 3, 4\}.$$

и ако $\mathbf{B}_1 = \{B_b \mid b \in \mathbf{B}\}$, тогаш инцидентната структура $\mathcal{D}_1 = (\mathbf{P}, \mathbf{B}_1, \in)$ е 3-(ν, 4, 1) блокшема изоморфна со блокшемата $\mathcal{D}$.

Понатаму ќе сметаме дека за 3-(ν, 4, 1) блокшемата $\mathcal{D}$ блоковите се подмножества точки.

Нека $(\mathbf{P}, \mathbf{A}, \in)$ е произволна 3-(ν, 4, 1) блокшема. Во множеството $\mathbf{P}$ ќе дефинираме тернарна операција ω на следниов начин:

1) $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{P}, x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1)\ \omega\, x_1\, x_2\, x_3 = x_4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \{x_1, x\ , x_3, x_4\} \in \mathbf{B};$$

2) $\omega\, xxy = \omega\, xyx = \omega\, yxx = y$, за кои било $x, y \in \mathbf{P}$.

На овој начин, на секоја 3-(ν, 4, 1) блокшема $\mathcal{D}$ можеме да и придружиме една тернарна структура $(\mathbf{P}, \omega)$. Ќе испитаме некои својства на оваа тернарна структура.

Директно од дефиницијата на тернарната операција ω следува дека:

$(\mathbf{S}_1)$ $(\mathbf{P}, \omega)$ *е комутативна.*

$(\mathbf{S}_2)$ $\omega\, x_1\, x_2\, x_3 = x_4 \Rightarrow \omega\, x_1\, x_2\, x_4 = x_3$.

Ако во една тернарна структура (S, ω) секоја од равенките

$$\omega\, xa\, b = c, \quad \omega\, ay\, b = c, \quad \omega\, ab\ \ = c,$$

е еднозначно решлива за кои било $a, b, c \in S$, тогаш тернарната структура се наречува 3-квазигрупа.

$(\mathbf{S}_3)$ $(\mathbf{P}, \omega)$ *е 3-квазигрупа.*

Доказ. Бидејќи тернарната структура $(\mathbf{P}, \omega)$ е комутативна, доволно е да покажеме дека за кои било $a, b, c \in \mathbf{P}$ постои единствен $x \in \mathbf{P}$, таков што $\omega\, abx = c$.

Ако $a \neq b \neq c \neq a$, тогаш, според (i), постои единствен елемент $x \in \mathbf{P}$, така што $\{a, b, x, c\} \in \mathbf{B}$, а тоа значи дека равенката $\omega\, abx = c$ има единствено решение.

Ако $a = b$, тогаш, според дефиницијата на тернарната операција ω, следува дека $x = c$ е единствено решение на равенката $\omega\, aax = c$.

Ако, пак, $a = c$ или $b = c$, тогаш $x = b$, односно $x = a$, е единствено решение на равенката $\omega\, abx = a$, односно $\omega\, abx = b$.

Со тоа својството $(\mathbf{S}_3)$ е докажано.

Секоја тернарна структура што ги задоволува условите $(\mathbf{S}_1)$, $(\mathbf{S}_2)$ и $(\mathbf{S}_3)$ ќе ја викаме $S3$-квазигрупа.

Нека, сега, $(\mathbf{P}, \omega)$ е конечна $S3$-квазигрупа. Ако $\mathbf{P} = \nu$ и ако

$$\mathbf{B} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \mid x_i \in \mathbf{P}, \quad \omega\, x_1\, x_2\, x_3 = x_4\},$$

тогаш инцидентната структура $(\mathbf{IP}, \mathbf{IB}, \in)$ е 3-$(\nu, 4, 1)$ блокшема. Точноста на оваа тврдење следува од тоа што за дадени елементи x_1, x_2 и x_3 од **IP** елементот $x_4 = \omega\, x_1, x_2\, x_3$ е еднозначно определен.

Од сето тоа следува дека:

Инцидентната структура $(\mathbf{IP}, \mathbf{IB}, \in)$ *е* 3-$(\nu, 4, 1)$ *блокшема ако и само ако придружената тернарна структура* $(\mathbf{IP}, \omega)$ *е* $S3$*-квазигрупа.*

3. Доказ на теоремата

Нека $\mathcal{D}_i = (\mathbf{IP}_i, \mathbf{IB}_i, \in)$ е 3-$(\nu, 4, 1)$ блокшема, $i = 1, 2$, а $(\mathbf{IP}_i, \omega_i)$ нека е придружената $S3$-квазигрупа на $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2$. Директниот производ $(\mathbf{IP}, \omega)$ на $S3$-квазигрупите $(\mathbf{IP}_1, \omega_1)$ и $(\mathbf{IP}_2, \omega_2)$ е исто така $S3$-квазигрупа. Бидејќи $|\mathbf{P}| = \nu_1\nu_2$, на $S3$-квазигрупата $(\mathbf{IP}, \omega)$ и се придружува една 3-$(\nu_1\nu_2, 4, 1)$ блокшема $\mathcal{D} = (\mathbf{IP}, \mathbf{IB}, \in)$.

Нека $y \in \mathbf{IP}_2$ е фиксираната точка. Пресликувањето $\varphi_y\colon \mathcal{D}_1 \to D$ дефинира со:

$$\varphi_y\,(x) = (x, y),\ \varphi\,(B) = B_x\{y\},$$

е мономорфизам, па, значи, инцидентната структура $(\mathbf{IP}_y, \mathbf{IB}_y, \in)$, каде што

$$\mathbf{IP}_y = \mathbf{IP}_1\, x\,\{y\}, \quad \mathbf{IB}_y = \{B_x\ \{y\} \mid B \in \mathbf{IB}_1\},$$

е потструктура од $\mathcal{D}$ изоморфна со $\mathcal{D}_1$. Исто така, инцидентната структура $(\mathbf{IP}_x, \mathbf{IB}_x, \in)$, каде што x е фиксиран елемент од $\mathbf{IP}_1$, а

$$\mathbf{P}_x = \{x\} \times \mathbf{IP}_2, \quad \mathbf{IB}_x = \{x\} \times B \mid B \in \mathbf{IB}_2\},$$

е потструктура од $\mathcal{D}$ изоморфна со $\mathcal{D}_2$. Значи, на секоја точка $y \in \mathbf{IP}_2$ одговара една потструктура од $\mathcal{D}$ изоморфна со $\mathcal{D}_1$, а на секоја точка $x \in \mathbf{IP}_1$ одговара потструктура од $\mathcal{D}$ изоморфна со $\mathcal{D}_2$. Според тоа, блокшемата $\mathcal{D}$ содржи најмалку ν_2 потструктури изоморфни со $\mathcal{D}_1$ и најмалку ν_1 потструктури изоморфни со $\mathcal{D}_2$.

Со тоа теоремата е докажана.

Последица. *За кои било* $r, s \in \mathbf{N}_0$, $(r, s) \neq (0, 0)$, *и кој било* $n \in \mathbf{N}$, *постои барем една* 3-$((3^r + 1)^n\,(3^s + 1)^n,\ 4, 1)$ *блокшема* $\mathcal{D}$, *којашто содржи најмалку* $(3^r + 1)^{n-1}\,(3^s + 1)^n$ *мебиусови потпростори со ред* 3 *и димензија* r *и најмалку* $(3^r + 1)^n\ (3^s + 1)^{n-1}$ *мебиусови потпростори со ред* 3 *и димензија* s.

Да спомнеме дека мебиусов простор со ред 3 и димензија n е 3-$(3^n + 1, 4, 1)$ блокшема.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dembovski P., Finite Geometries, Springer-Verlag New York inc, 1968.
[2] Холл М., Комбинаторика, Москва, 1970.

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wird folgender Satz bewiesen;

Satz. Ist $\mathfrak{D}_1$ ein 3-$(v_1, 4, 1)$ Blockplan und $\mathfrak{D}_2$ ein 3-$(v_2, 4, 1)$ Blockplan, so existiert 3-$(v_2v_1, 4, 1)$ Blockplan $\mathfrak{D}$, der eine Unterstruktur enthält, die mit dem Blockplan $\mathfrak{D}_1$ isomorph ist und eine Unterstruktur, die mit dem Blockplan $\mathfrak{D}_2$ isomorph ist.

Auf jedem 3-$(v, 4, 1)$ Blockplan $\mathfrak{D}$ wird eine 3-Quasigruppe hinzugefügt und werden ihre Eingeschaften geprüft. Als Folgerung des bewiesenen Satzes erhält man folgendes Ergebnis;

Folgerung. Für beliebige nichtnegative ganze Zahlen r, s, $(r, s) \neq \neq (o, o)$, und für jede beliebige natürliche Zahl n, existiert mindestens ein 3 – $((3^r + 1)^n (3^s + 1)^n, 4, 1)$ Blockplan.