UNE REMARQUE SUR UNE REPRESENTATION ANALYTIQUE DES DISTRIBUTIONS

Rečkovski Nikola

1. NOTATIONS ET DEFINITIONS

$D = D(R)$: espace des fonctions $\varphi(x)$ indéfinement dérivables sur R à support compact; c'est-à-dire, si la fonction $\varphi \in D$, alors l'adhérence de l'ensemble $\{x \in R: \varphi(x) \neq 0\}$ est compacte. On dit que la suite (φ_j), $\varphi_j \in D$ est convergente vers O si des $\varphi_j \in D$ ont leurs supports cotenus dans un compact fixe de R, et si elles convergent unifrmément vers O dans R ainsi que chacune de leurs dérivés.

$D' = D'(T)$: espace des fonctionnelles linéaires et continues définies sur D.

Les membres de l'espace D' sont appelés des distributions. $E = E(R)$: espace des fonctions φ indéfinement dérivables sur R (à support quelconque). On dit que la suite des fontions (φ_j) $\varphi_j \in E$ converge vers O dans E si des $\varphi_j \in E$ convergent unifromément vers O sur tout compact, ainsi que chacune de leurs dérivées.

$E' = E'(R)$: espace des fonctionnelles linéaires et continues définies sur E. Les members de l'espace E, sont appelés aussi des distributions.

Il est connu que pour toute distribution $T \in D'$ il existe une paire des fonctions:

$f^+(z), f^-(z)$; où $z = x + iy$, $Imz = y$

$f^+(z)$ est analytique pour $Imz > 0$.

$f^-(z)$ est analytique pour $Imz < 0$.

Cette paire des fonctions vérifie la condition:

$$(1.1) \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f^+(x + i\varepsilon) - f^-(x - i\varepsilon)] \, \varphi(x) \, dx = < T, \varphi > \equiv T(\varphi).$$

Chaque paire des fonctions $f^+(z)$, $f^-(z)$, $f^+(z)$ analytique pour $Imz > 0$, $f^-(z)$ analytique pour $Imz < 0$ qui vérifie (1.1) est appelée une représentation analytique de la distribution T.

Comme $E' \subset D'$ il suit que pour toute distribution $T \in E'$ il existe une représentation analytique. Mais pour une distribution $T \in E'$ est définie la fonction

$$(1.2) \qquad \hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} < T_t, \frac{1}{t-z} > , \; Imz \neq 0$$

car la fonction $t \to \dfrac{1}{t-z}$ appartient à $E\,(Imz \neq 0)$.

La fonction $\hat{T}(z)$ est analytique sauf le support de la distribution T. $\hat{T}(z)$ est une représentation analytique pour la distribution T. Cette représentation analytique est appelée la représentation de Cauchy pour T. ([1], p. 67 et 73).

2. REPRESENTATION

Ici nous donnons un théoreme sur une représentation analytique des distributions.

Théorème 1. Soit la fonctin $f(z)$ (analytique pour $Imz \neq 0$) une représentation analytique de la distribution $T \in D'$. Soit $F(z)$ une fonction primitive de $f(z)$ $(Imz \neq 0)$.

Si pour $F(z)$ il existe une function $\rho(t) \in D$ telle que:

$$(2.1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\, dt = 1; \; \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)]\; \rho(x)\, dx = C,$$

alors nous avons

$$(2) \qquad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)]\; \varphi(x)\, dx = <S, \varphi> + <C, \varphi>, \text{ où}$$

S est une distribution primitive de T $\varphi \in D$, c'est-à-dire,

$$(2.3) \qquad < S', \varphi > = < T, \varphi > , \quad \varphi \in D.$$

Démonstration. D'après les conditions du théorème nous avons

$$(2.4) \qquad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)]\; \varphi(x)\, dx = < T, \varphi >, \; \varphi \in D \text{ et}$$

$$(2.5) \qquad F'(z) = f(z), \; Imz \neq 0.$$

Par une intégration partielle on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)]\, \varphi(x)\, dx = [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)]\, \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)]\, \varphi'(x)\, dx, \text{ d'où}$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)]\, \varphi(x)\, dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to = 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)]\, \varphi'(x)\, dx$$

D'après (2.4) il résulte que

$$(2.6) \qquad < T, \varphi > = - \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)]\, \varphi'(x)\, dx$$

Etant donné que $S' = T$, nous avons

$$< S, \varphi > = - - < T, \int_{-\infty} \varphi^*(t)\, dt, \quad \varphi \in D$$

$$\varphi(t) = \varphi^*(t) + a\rho(t), \; a = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt$$

[2], p. 96].

D'après (2.6)

$$< S, \varphi > = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)]\, \varphi^*(x)\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)]\, \varphi(x)\, dx -$$

$$- a \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)]\, \rho(x)\, dx$$

comme

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)] \, \rho(x) \, dx = C$$

il résulte que

$$< S, \varphi > = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)] \, \varphi(x) \, dx - C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, dx$$

par conséquent

$$(2.7) \quad < S, \varphi > + < C, \varphi > = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)] \, \varphi(x) \, dx$$

Exemple. Pour la distribution $T = Pf \frac{H(t)}{t}$, où Pf signifie partie finie de Hadamard et

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

la fonction $f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} \log(-z); \; -\pi < \arg z \leqslant \pi$ est une représentation analytique. Etant donné que $S = [\text{longt } H\, t)]$ est une distribution pimitive de $Pf \frac{H(t)}{t}$ il suit que la fonction

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int -\frac{\log(-z)}{z} dz = -\frac{1}{4\pi i} \log^2(-z), \quad Imz \neq 0,$$

$-\pi < \arg z \leqslant \pi$ vérifie la condition:

$$< \log t \; H(t), \varphi > + < C, \varphi > = - \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\log^2(-x - i\varepsilon) -$$

$$- \log^2(-x + i\varepsilon)] \, \varphi(x) \, dx$$

Mais

$$-\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}[\log^2(-x-i\varepsilon)-\log^2(-x+i\varepsilon)]\,\varphi(x)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\{[\log\sqrt{x^2+\varepsilon^2}+\mathrm{iarg}(-x-i\varepsilon)]^2-[\log\sqrt{x^2+\varepsilon^2}+$$

$$+\mathrm{iarg}(-x-i\varepsilon)]^2\}\,\varphi(x)\,dx-\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\{[\log\sqrt{x^2+\varepsilon^2}+$$

$$+\mathrm{iarg}(-x-i\varepsilon)]^2+[\log\sqrt{x^2+\varepsilon^2}+\mathrm{iarg}(-x+i\varepsilon)]^2\,\varphi(x)\,dx.$$

Si $\varepsilon\to+0$ on obtient que

$$-\lim\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{Log}\,(-x-i\varepsilon)-\log^2(-x+i\varepsilon)]\,\varphi(x)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\log x\,\varphi(x)\,dx,$$ c, est à dire $C=0$. conséquement la fonction

$$F(z)=-\frac{1}{4\pi i}\log^2(-z),\ Im\,z\neq 0,\ -\pi<\arg z\leqslant\pi$$

est une representation analytique de la distribution

$$S=[\log t\ H(t)].$$

BIBLIOGRAPHIE

1] H. Bremermann, Распределения, комплексние переменние и преобразования Фурйе, Издателство „Мир“, Москва, 1968.

[2] L. Jantseher, Distributionen, Walter de Gruyter, Berlin 1971.

ЗА АНАЛИТИЧКА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА НА ДИСТРИБУЦИИ

Никола Речковски

Резиме

Во оваа работа даваме една теорема за тоа кога една примитивна функција $F(z)$ на дадена функција $f(z)$, z — комплексна променлива, претставува аналитичка репрезентација на дистрибуција.