EINE BEMERKUNG ÜBER POLYNOMLÖSUNGEN DER HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Ilija A. Šapkarev

1. Es sei die lineare homogene Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0 \tag{1}$$

gegeben, wobei $a_i = a_i(x)$ m-mal differenzierbare Funktionen im Intervale $[a, b]$ sind.

In [1, 2, 3] werden einige Relationen zwischen die Funktionen $a_i(x)$ und ihre Ableitungen erhalten, damit die gegebene Differentialgleichung (1) Polynome als Lösungen besitzt.

Für das Auftreten von Polynome als Lösungen der Gleichung (1) in dieser Arbeit geben wir zwei Theoreme, die mit einem neuen Verfahren bewiesen werden.

Wenn wir zuerst

$$\frac{a_i}{a_0} = a_{i,0} \quad \text{und} \quad a_{i,m-1} = \frac{a'_{i+1,m-2} + a_{i,m-2}}{a'_{i,m-2} + a_{0,m-2}}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n, \ a_{n+1} = 0) \tag{2}$$

setzen, d ann können wir die folgende Theoreme aussagen.

Theorem 1. Für das Auftreten von Polynom vom Grad m als Lösung der Differentialgleichung (1) ist es notwendig und hinnreichend dass die koeffizienten $a_i(x)$ sowie ihre Ableitungen die Relation

$$a'_{1,m-1} + a_{0,m-1} = 0 \tag{3}$$

erfüllen.

Theorem 2. Für das Auftreten von Polynome vom Grad m bis $m+n-1$ als Lösungen der Differentialgleichung (1) d.h. für das Auftreten von Polynom vom Grad $m+n-1$ als ihren allgemeinen Integral ist es notwendig und hinreichend dass die Koeffizienten $a_i(x)$ sowie ihre Ableitungen die Relationen

$$a_{i}{}'_{+1,\ m-1} + a_{i,\ m-1} = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{4}$$

erfüllen.

Dabei ist Voraussetzen dass die Ausdrücken, die in den Nenner auftreten, ungleich von Null sind d.h. dass die gegebene Differentialgleichung (1) keine Polynomlösungen vom Grad kleiner als m besitzt.

2. Ist in der Differentialgleichung (1) $a_0 \neq 0$, so kann sie, nach 2, in der Gestalt

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i,\ 0}\, y^{(i)} = 0$$

geschrieben werden. Diese Gleichung, durch Differenzieren, geht in die Differentialgleichung

$$a_{n,\ 0}\, y^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i{}'_{+1,\ 0} + a_{i,\ 0})\, y^{(i+1)} = 0$$

über, woraus durch Dividieren mit $a_{1,\ 0} + a_{0,\ 0} \neq 0$, nach 2, arhält man die Diffrentialgleichung

$$a_{n,\ 1}\, y^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} (d_i{}'_{+1,\ m-1} + a_{i,\ m-1})\, y^{(i+1)} = 0.$$

Wenn wir dieses Verfharen m-mal wiederholen, nach 2, erhalten wir die Differentialglechung.

$$a_{n,\ m-1}\, y^{(m+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} (a'_{i+1,\ m-1} + a_{i,\ n-1})\, y^{(i+m)} = 0.$$

Von dieser Differentialgleichung kann man das Folgende feststellen.

1°. Wenn ein Polynom vom Grad m als L¨sung der Differentialgleichung (1) auftrit, so ist die Relation (3) ausgefüllt.

2°. Ist die Relation (3) ausgefüllt, so kann man von dieser Gleichung sehen, dass die Differentialgleichung (1) ein Polynom vom Grad m als Lösung besitzt.

3°. Wenn n Polynome, deren Grade von m bis $m+n-1$ sind, als Losungen der Differentialgleichung (1) auftreten, so sind die Relationen (4) ausgefüllt.

4°. Werden die Relationen (4) ausgefüllt, so kann man von letzten Gleichung feststellen, dass ein Polynom vom Grad $m+n-1$ als allgemeines Integral der Differentialgleichung (1) auftrit.

Damit sind die zwei ausgesagte Theoreme bewiesen.

Beispiel 1. Die Differentialgleichung

$$a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

wird eine Polynomlössung vom Grad 1 bzw. 2 bzw. 3 haben wenn die Relation

$$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)' + 1 = 0 \text{ bzw} \cdot \left[\frac{a_1/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right]' + 1 = 0$$

bzw.

$$\left\{\frac{\dfrac{a_1/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}}{\left[\dfrac{a_1/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right]' + 1}\right\}' + 1 = 0$$

erfüllt ist..

Beispiel 2. Die Differentialgleichung

$$a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

wird eine Polynomlösung vom Grad 2 bzw. 3 haben, wenn die Relation

$$\left[\frac{(a_2/a_0)' + a_1/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right]' + 1 = 0$$

$$\text{bzw} \cdot \left\{\frac{\left[\dfrac{a_1/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right]' + \dfrac{(a_1/a_0)' + a_1/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}}{\left[\dfrac{(a_2/a_0)' + a_1/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right]' + 1}\right\}' + 1 = 0$$

erfüllt ist.

Beispiel 3. Die Differentialgleichung

$$a_3\, y''' + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

wird eine Polynomlösung vom Grad m haben, wenn die Relation

$$\left\{\frac{\left[\dfrac{(a_3/a_0)' + a_2/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right]' + \dfrac{(a_2/a_0)' + a_1/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}}{\left[\dfrac{(a_2/a_0)' + a_1/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right]' + 1}\right\}' + 1 = 0$$

erfüllt ist.

Beispiel 4. Die Differentialgleichung

$$a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

wird Polynomlösungen vom Grad 2 und 3 haben, wenn ihre Koeffizienten die Relationen

$$\left[\frac{(a_2/a_0)' + a_1/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right] + 1 = 0, \quad \left[\frac{a_2/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right]'' - 1 = 0$$

erfüllen.

Beispiel 5. Die Differentialgleichung

$$a_3\, y''' + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

wird Polynomlösungen vom Grad 2, 3 und 4 haben, wenn ihre Koeffizienten die Relationen

$$\left[\frac{(a_2/a_0)' + a_1/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right]' + 1 = 0, \quad \left[\frac{(a_3/a_0)' + a_2/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right]'' - 1 = 0,$$

$$\left[\frac{a_3/a_0}{(a_1/a_0)' + 1}\right]''' + 1 = 0$$

erfüllen.

LITARATUR

[1] Лазов П. Р., Димитровски Д. С., За една класа на линеарни диференцијални равенки чиј општ интеграл е полином, Билтен на ДМФ на СРМ, книга XXV, 1974.

[2] Šapkarev I. A., Über Polynomlösungen der linearen Differentialgleichungen, Mathematika Balkanica 3 (1973).

[3] Šapkarev I. A., Sur une équation différentielle linéaire d'ordre n dont la solution générale est un polynome de n-ème degré, Matematički vesnik 1(16) 1964, 49-50.