ЕДНА КЛАСА $2 - \left(\sum_{k=0}^{4} p^{ks}, p^s+1, 1\right)$ БЛОКШЕМИ ШТО НЕ СЕ ПРОЕКТИВНИ ПРОСТОРИ

А. Самарџиски

Секој конечен проективен простор $PG(n, p^s)$ е $2-\left(\sum_{k=0}^{n} p^{ks}, p^s+1,1\right)$ блокшема. Досега не се познати (барем на авторот) примери на $2-\left(\sum_{k=0}^{n} p^{ks}, p^s+1,1\right)$ блокшеми што не се проективни простори. Во оваа работа ќе покажеме дека такви блокшеми [постојат. Имено ќе ја докажеме следнава теорема:

ТЕОРЕМА. *За кој било прост број p и кој било природен број s постои барем една*

$$2-\left(\sum_{k=0}^{4} p^{ks}, p^s+1,1\right)$$

блокшема $\mathcal{D}$ што не е проективдн простор.

Доказ. Да го означиме со $\mathcal{S}_1=(\mathbf{P}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{I}_1)$ шпернеровиот простор со p^{4s} точки и p^s точки на секоја права, каде што p е произволен прост број и s е произволен природен број, што ги има следниве својства:

(i) $\mathcal{S}_1$ содржи гочно $p^{4s}+p^{2s}$ дезаргови афини рамнини со ред p^s;

(ii) Низ кои било две различни точки минува само една дезаргова афина рамнина со ред p^s;

(iii) Низ која било точка минуваат точно $p^{2s}+1$ афини рамнини со ред p^s.

Егзистенцијата на таков шпенеров простор е дадена од авторот [2]. Овој шпернеров простор е $2-(p^{4s}, p^s, 1)$ блокшема.

Од својствата (i) и (ii) следува дека кои било две афини рамнини од $\mathcal{S}_1$ имаат најмногу една заедничка точка. Ако афините рамниниод $\mathcal{S}_1$ ги означиме со Π_j, $j=1, 2, \ldots, p^{4s}+p^{2s}$, и ако во множеството од овие афини рамнини од $\mathcal{S}_1$ дефинираме реалација „| |" (паралелност) со:

$$\Pi_i \,||\, \Pi_j \Leftrightarrow i = j \quad \text{или} \quad \Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset,$$

тогаш добиваме една еквивалентност во множеството афини рамнини во $\mathcal{S}_1$. Значи, множеството афини рамнини во шпенеровиот простор $\mathcal{S}_1$ може да се разбие во класи паралелни рамнини при што бројот на класите паралелни рамнини е $p^{2s}+1$, а секоја класа содржи по p^{2s} афини раминини.

Да го означиме со $\mathcal{S}_2=(\mathbf{P}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{I}_2)$ проективниот простор $PG(3, p^s)$ со димензија 3 и со ред p^s. Секој проективен простор $PG(3, p^s)$ е шпернеров простор (Deniston [2], Beutelspacher [1]). Значи, множеството прави од проективниот простор $\mathcal{S}_2$ може да се разбие на класи паралелни прави при што бројот на класите е p^s+1, а секоја класа содржи по $p^{2s}+1$ прави.

Множествата точки $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ можеме да ги избереме така што $\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2 = \emptyset$. Нека $\mathbf{M} = \{a_1, a_2, \dots, a_{p^{2s}+1}\}$ е еден фиксен прамен паралелни прави во $\mathcal{S}_2$. Секоја од афините рамнини Π_j, $j=1, 2, \dots, p^{4s}+p^{2s}$ со една права $a_k \in \mathbf{M}$, ја прошируваме до проективна рамнина $\overline{\Pi}_j$ на следниов начин: ако афините рамнини Π_i и Π_j се паралелни, тогаш нив ги прошируваме до проективни рамнини со една иста права, а ако имаат заедничка точка, нив ги проширувамe до проективни рамнини со две различни прави од $\mathbf{M}$.

Да конструираме една нова инцидентна структура $\mathcal{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{I})$ на следниов начин:

1) $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2$;

2) множеството прави $\mathbf{B}$ ги содржи правите од проективните рамнини $\overline{\Pi}_j$, $j = 1, 2, \dots, p^{4s}+p^{2s}$, и правите од проективниот простор $\mathcal{S}_2$;

3) инцидентноста $\mathbf{I}$ е индуцирана од инцидентностите $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$.

Ќе испитаме некои својства на инцидентната структура:

($\mathbf{S}_1$) *Инцидентната структура* $\mathcal{D}$ *е* $2-\left(\sum_{k=0}^{4} p^{ks}, p^s+1, 1\right)$ *блокшема.*

Дрказ. Множествата $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ се дисјунктни, па имаме:

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2| = |\mathbf{P}_1| + |\mathbf{P}_2| = p^{4s}+p^{3s}+p^{2s}+p^s+1.$$

Понатаму, на секоја права лежат точно p^s+1 точка.

Нека, сега, A и B се две различни точки. Ако $A, B \in \mathbf{P}_2$, тогаш низ нив минува единствена права, зашто $\mathcal{S}_2$ е блокшема. Ако $A, B \in \mathbf{P}_1$, тогаш низ нив минува единствена афина рамнина Π_j од $\mathcal{S}_1$, па ако неа ја прошириме до проективна рамнина $\overline{\Pi}_j$, тогаш, бидејќи $\overline{\Pi}_j$ е блокшема, ќе следува дека низ A и B минува единствена права. Ако, пак, $A \in \mathbf{P}_1$,

$B \in \mathbf{P}_2$, тогаш низ B минува единствена права од $\mathbf{M}$ со која права само една фина рамнина од $\mathcal{S}_1$, што минува низ A, е проширена до проективна рамнина. Значи, A и B припаѓаат на само една од проективните рамнини $\overline{\Pi}_j$, па низ A и B минува единствена права.

Следствено, инцидентната структура $\mathcal{D}$ е $2-\left(\sum_{k=0}^{4} p^{ks}, p^s+1, 1\right)$ блокшема.

(S_2) *Секоја проективна рамнина од $\mathcal{D}$, што не припаѓа на проективеиот просмор $\mathcal{S}_2$, има заедничка права со $\mathcal{S}_2$ која му припаѓа на прамемот паралелни прави* $\mathbf{M}$.

Доказ. Нека $\overline{\Pi}$ е произволна проективна рамнина од $\mathcal{D}$, што не припаѓа на проективниот простор $\mathcal{S}_2$, и нека а е заедничката права на $\overline{\Pi}$ и $\mathcal{S}_2$. Соодветната афина рамнина Π, во однос на правата a, е афина рамнина од шпернеровиот простор $\mathcal{S}_1$, па, значи, Π се совпаѓа со некоја од афините рамнини $\Pi_j, j=1, 2, \ldots, p^{4s}+p^{2s}$. Од тоа следува дека $a \in \mathbf{M}$.

(S_3) *Инцидеитната структуура $\mathcal{D}$ содржи точно $p^{4s}+p^{3s}+p^{2s}+ p^s+1$ дезаргови проективни рамнини со ред p^s.*

Доказ. Според (S_2), секоја проективна рамнина од $\mathcal{D}$ или се содржи во $\mathcal{S}_2$ или, пак, се совпаѓа со некоја од проективните рамнини $\overline{\Pi}_j$, $j=1, 2, \ldots, p^{3s}+p^{2s}$. Бројот на проективните рамнини во $\mathcal{S}_2$ е $p^{3s}+ p^{2s}+p^s+1$, па, значи, бројот на сите проективни рамни и $\mathcal{D}$ во е $p^{4s}+p^{3s}+p^{2s}+p^s+1$. Јасно дека сите овие проективни рамнини се дезаргови.

(S_4) *Инцидентнама струкмура $\mathcal{D}$ не е проективен простор.*

Доказ. Бројот на проективните рамнини во проективниот простор $PG(4, p^s)$ е $(p^{4s}+p^{3s}+p^{2s}+p^s+1)(p^{2s}+1)$; бројот на проктивните рамнини во $\mathcal{D}$, според (S_3), е $p^{4s}+p^{3s}+p^{2s}+p^s+1$. Следствено, инцидентната структура $\mathcal{D}$ не е изоморфна со проективниот простор $PG(4, p^s)$, т.е. $\mathcal{D}$ не е проективен простор.

Со тоа теоремата е докажана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Beutelspacher, A., On parallelism in finite pojective spaces, Geometriae Dedicata, 1973.

[2] Deniston, R. H. F., Some packings of projective spaces, Acc. Nat. dei Lincei, Serie VIII vol 12, fas. 1 (36—40) 1972.

[3] Samardžiski, A., A class of finite Sperner spaces, Abh. Math. Sem Hamburg, 42 (205—211) 1974.

Zusammenfassung

Der Projektive Raum $PG(n, p^s)$ ist $2 - \left(\sum_{k=0}^{4} p^{ks}, p^s + 1, 1\right)$ Blockplan, umgekehrt aber muss das nicht gelten. In der Arbeit ist die Existenz solcher Blockplänen gezeigt. Es wird nämlich folgender Satz bewiesen:

Satz. Für jede belibiege Primzahl p und für jede beliebiege natürliche Zahl s existiert mindestens ein $2 - \left(\sum_{k=0}^{4} p^{ks}, p^s + 1, 1\right)$ Blockplan, der kein projektiver Raum ist.