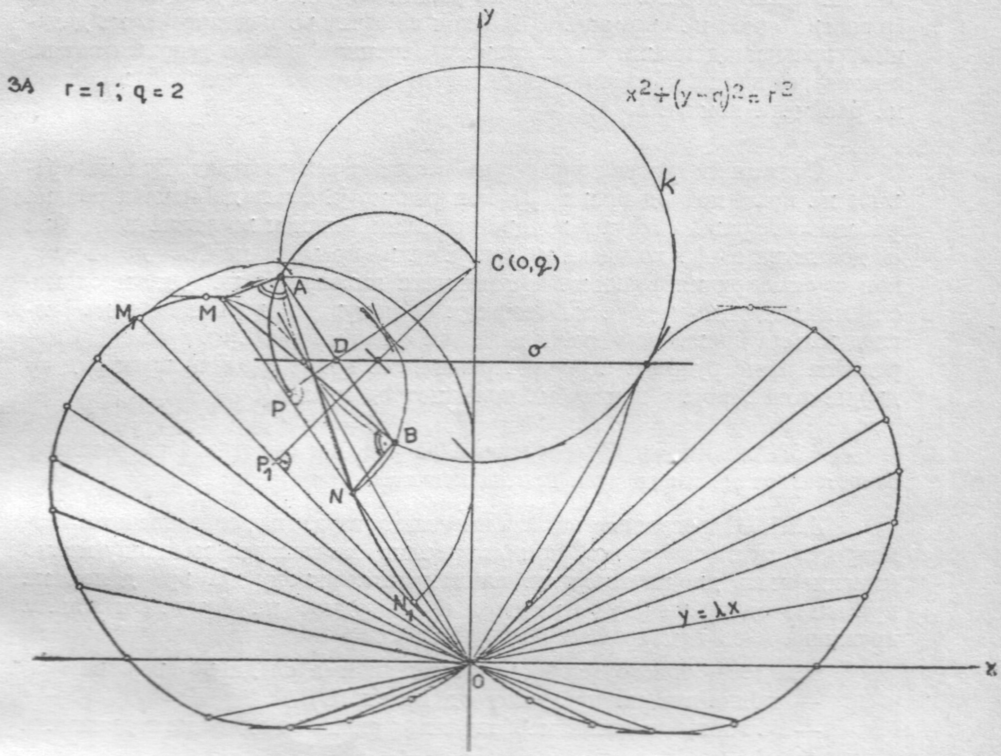
OM во однос на фундаменталната кружница, што ги презентирааат реалните репрезентанти на имагинарните пресечни точки со истата кружница k.

Од фактот дека се $MA \perp NA$ и $MB \perp NB$ следува точките A, M, N и B да припаѓаат на една кружница со центар P и радиус $\overline{PA} = \overline{PB}$.



Црт.2. Конструиран е реален репрезентант на имагинарен дел од коника k на дел на прамен од прави (O), кој е реална рамнинска крива од четврти ред со двојна точка O во однос на фундаментална кружница k.

Усвојувајќи ги точките C и O за центри (носители) на два проективна прамена од прави, чии придружени прави меѓусебно се нормални (ортогонални), формираат (произведуваат) геометриско место на центрите на елиптичните инволуции на правите од праменот (O), кое дефинира нова кружница со дијаметар $\overline{OC}$.

Од центарот O на праменот (O) повлекуваме две тангенти кон фундаменталната кружница k, сврзницата на допирните точки е поларата на точката O, која е пол за таа права во однос на кружницаат k.

На приложениов цртеж подробно е покажано одредувањето на симетричните точки M, N и M_1, N_1 во однос на центарот на инволуцијата P, односно P_1, за две прави на зададениот прамен од прави. Потоа се конструирани симетрични точки на повеќе прави од праменот (O) што реално не ја сечат кружницата k. Така најдените точки ги сврзуваме континуирано, добиваме затворена рмнинска крива од две симетрични гранки во однос на сврзницата OC, кои се сечат во центарот O на дадениот прамен од прави. Оваа крива е бараниот **реален репрезентант на имагинарен дел на коника к врз делот на праменот од прави (0)** во однос на реалната коника k.

Синтетичен доказ за редот на реалниот репрезентант. Дел на правите на праменот од прави (O), кои реално ја сечат добиената реална рамнинска крива, секогаш во две пресечни точки и во точката O. Ова се докажува со фактот дека на секоја таква права се наоѓаат две точки, кои се симетрични точки на елиптичната инволуција на односниот носител. Евидентно е дека низ точката O минуваат две тангенти на разгледуваната крива, што значи дека таа е двојна точка на кривата. Според тоа, конструираната реална рамнинска крива е од четврти ред со двојна точка, која е центар на праменот од прави (O).

4.3. Аналитична интерпретација на редот и својствата на реалниот репрезентант на имагинарен дел на коника.

4.3.1. Одредување на аналитичниот израз на определеното геометриско место на точки, кои се реални застапници на конјугирано имагинарните двојни точки на елиптичната инволуција врз делот на праменот од прави (O) со носител O во однос на фундаменталната кружница k со центар C.

Тоа геометриско место на точки ги има следниве својства:

— припаѓаат на праменот од прави (O),

— бараните точки се наоѓаат симетрично во однос на подвижната точка P (таа формира кружница k_1 со дијаметар $\overline{OC}$).

— се добиваат како заеднички точки на фамилија на кружници (k_s) и на прави на прамен од прави (O).

Тука кружниците од фамилијата (k_s) имаат центри во подвижната точка P /пол) а радиусите се детерминирани со точката P и со пресечните точки на подвижната полара p со фундаменталната кружница k.

За да добиеме наједноставен вид на равенка на геометриското место на точки, ја усвојуваме точката O за координатен почеток на рамнински декартов правоаголен координатен систем и за y-оската сврзницата OC (црт. 2). Тогаш равенката на фундаменталната кружница k, гласи:

$$x^2 + (y - q)^2 = r^2 \text{ или } x^2 + y^2 - 2\,qy + f = 0 \tag{1}$$

каде е $f = q^2 - r^2$, при тоа се r, q реални броеви и за нив важи $r < q$.

Равенката на праменот од прави (O) има вид

$$y = \lambda x, \text{ каде е } \lambda \text{ произволен параметар} \tag{2}$$

Два циркуларна проективна прамена од прави $(O)\,\overline{\wedge}\,(C)$ произведуваат кружница k_1 со дијаметар $\overline{OC}$, чија равенка е

$$x^2 + (y - q/2)^2 = (q/2)^2 \text{ или } x^2 + y^2 - qy = 0 \tag{3}$$

Потоа ги бараме координатите на подвижната точка P што припаѓа на праменот (O) и на кружницата k_1, значи $y = \lambda x$ и $x^2 + y^2 - qy = 0$, оттука $(1 + \lambda^2)\, x^2 - q\lambda\, x = 0$, $x/(1 + \lambda^2)\, x - q\lambda/ = 0$, па се добива $x = 0$, $(1 + \lambda^2)\, x - q\lambda = 0$, отаде ги наоѓаме координатите на подвижната точка P (полот):

$$x = \frac{q\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad y = \frac{q\lambda^2}{1 + \lambda^2}, \text{ егзистираат бидејќи е секогаш } 1 + \lambda^2 \neq 0.$$

Во претходниве изрази имплицитно е содржано решението $x = 0$, $y = 0$, кога е $\lambda = 0$.

Земаме нова кружница со центар во P што минува низ пресечни точки на поларата p со кружницата k, чија равенка има вид:

$$\left(x - \frac{q\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^2 + \left(y - \frac{q\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right)^2 = R^2$$

или (4)

$$x^2 + y^2 - \frac{2q\lambda^2}{1 + \lambda^2}\, x - \frac{2q\lambda^2}{1 + \lambda^2}\, y + \frac{q^2 \lambda^2}{1 + \lambda^2} - R^2 = 0,$$

каде R уште не е одреден, тоа ќе го направиме користејќи го условот за ортогоналност на секоја кружница на фамилијата од кружници (k_s) со фундаменталната кружница k:

$$2\left[0 \cdot \left(-\frac{q\lambda}{1 + \lambda^2}\right) + q \cdot \frac{q\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right] - \left(f - \frac{q^2 \lambda^2}{1 + \lambda^2} - R^2\right) = 0,$$

отаде е $R^2 = f - \dfrac{q^2 \lambda^2}{1 + \lambda^2}$. Овој израз го внесуваме во релацијата (4),

добиваме
$$x^2 + y^2 - \frac{2\, q\lambda}{1 + \lambda^2}\, x - \frac{2q\lambda^2}{1 + \lambda^2}\, y + \frac{2q^2 \lambda^2}{1 + \lambda^2} - f = 0, \tag{5}$$

каде се q и f однапред зададени вредности, а λ е променлив параметар. Заради параметарот λ равенката (5) претставува фамилија од кружници (k_s).

Бараното геометриско место на точки се наоѓа на фамилијата од кружници (k_s) со равенката (5) и на праменот од прави (O) со равенката (2), кои ги одредуваат неговите параметарски равенки.

Елиминирајќи го параметарот λ и ставајќи го $f = q^2 - r^2$, на крајот добиваме

$$x^4 + y^4 - 2qy^3 + 2x^2y^2 + (q^2 + r^2)\,y^2 - 2qx^2y + (r^2 - q^2)\,x^2 = 0, \qquad (7)$$

тоа е аналитички израз на бараното геометриско место на точки.

Во колку центарот O на праменот (O) ја промени положбата ќе добиеме пак равенка од четврта степен но со други коефициенти.

Редот на добиената алгебарска рамнинска крива. Од степенот на равенката (7) констатираме дека рамнинската крива е од четврти ред. Се покажува дека која и да е права на рамнината ја сече оваа крива најмногу во четири реални точки, од кои две може да коинцидираат, кога таа права минува низ координатниот почеток O.

Особеност на формата на раминската крива од четврти ред. Аналитичкиот израз (7) не се менува со промена на знакот пред агументот x, поради тоа кривата е симетрична во однос на y-оската; таа е составена од две осно-симетрични гранки што минуваат низ центарот O на праменот (O), а точката O е нејзина сингуларна (двојна). Постојат четири точки на рамнинската крива во кои тангентите се паралелни со x-оската, имено два минимума и ист број на максимуми, симетрични во однос на y-оската.

За различни вредности на големините q и r (под услов $r < q$), не се менува формата на кривата од четврти ред. Меѓутоа, во колку диференцијата помеѓу q и r е помала, во толку кривата е поразвлечена и гранките повеќе дивергираат.

4.4. ДИСКУСИЈА

Ако ставиме $r=q$, тогаш равенката на фундаменталната кружница добива вид $x^2 + y^2 - 2ry = 0$.

Се покажува дека бараното геометриско место на точки не е реална крива од четврти ред, туку крива од втор ред (коника), која коинцидира со фундаменталната кружница. Поточно речено, тоа е двозначна кружница. Овој резултат геометриски интерпретиран е мошне евидентен.

Нека земеме $r > q$, т.е. центарот O на праменот (O) е во внатрешноста на фундаменталната кружница, тогаш реалната крива од четврти ред дегенерира само во една реална-изолирана точка O. Во комплексната рамнина низ двојната изолирана точка минуваат две конјугирано комплексни правци на тангенти на имагинарната крива на бараното геометриско место на точки.

4.4.1. И на крајот, да го разгледаме **геометриското место на симетрични точки што ќе се добие на прамен од паралелни прави,** кои исто така реално не ја сечат фундаменталната коника. При погоден избор на декатов правоаголен координатен систем во рамнината на фундаменталната кружница k се центар $c(O, r)$ (црт. 3.), која во овој случај има равенка

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2 \text{ или } x^2 + y^2 - 2\,r\,y = 0, \tag{8}$$

и равенка на праменот од паралелни прави (O_∞) е $y=\mu$, (9) кои реално не ја сечат зададената кружница k, што е можно ако за параметарот μ важи релацијата $2r < \mu < 0$, каде r кој и да е реален позитивен број.

Постапувајќи аналогно како во т. 4.3.1. и земајќи ги предвид равенките (8) и (9), ги добиваме параметарските равенки на бараното геометриско мето на точки: $x^2 + y^2 - 2\mu\,y + 2r\,\mu = 0$ и $y = \mu$.

Елиминирајќи го параметарот μ, ја наоѓаме равенката

$$x^2 - y^2 + 2r\,y = 0 \text{ или } -x^2 + (y - r)^2 = r^2, \tag{10}$$

која претставува еднаквострана хипербола со центар во $C(O, r)$, чија реална оска е во правец на y-оската, односно имагинарната оска има правец на правите од праменот $y=\mu$. Двојната точка на рамнинската крива од четврти ред тука преминува во две бескрајни точки на хиперболата. Според тоа одредениот реален репрезентант од црт. 2. аплициран тука на црт. 3. **дегенерира во реална хипербола и двојна права** која е бескрајна права на рамнината.

Фундаменталната кружница k и добиената еднаквострана хипербола се во перспективно колинеациска положба, со колинеациски центар во едното O, односно другото теме на хиперболата и колинеациска оска е тангента во другото, односно во првото теме. Ова овозможува поедноставна и побрза конструкција на заемно респективните коники.

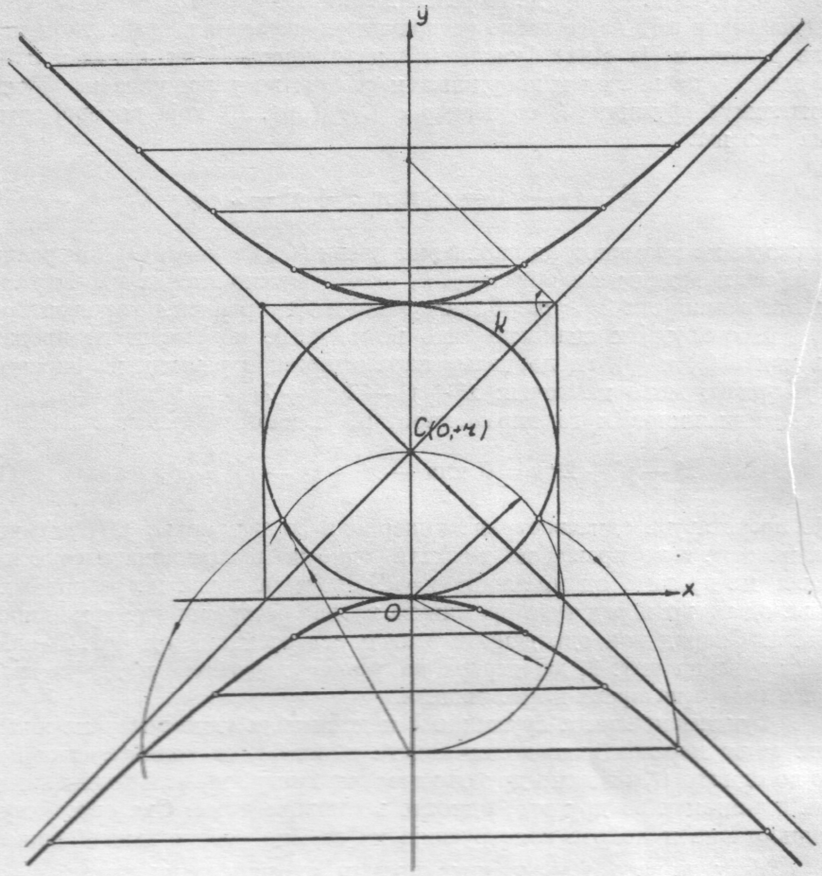
Меѓутоа, ако земеме друг прамен од паралелни прави $x = \nu$, (11), во однос на фундаменталната кружница k со равенката (8), ќе добиеме нова еднаквострана хипербола со равенка $x^2 - (y - r)^2 = r^2$, со ист центар C, при која имагинарната оска има правец на правите од праменот $x = \nu$.

На црт. 4. е покажано со синтетична постапка (применет е начинот презентиран на црт. 1.) дека ако земеме за фундаментална еднаквострана хипербола $-x^2 + (y - r)^2 = r^2$ на праменот од паралелни прави $y = \mu$ се добива со таа конструкција кружница, чија равенка има вид $x^2 + (y - r)^2 = r^2$, која е идентична со (8).

Со аналитична и синтетична постапка може да се добијат следниве резултати.

1° Ако е дадена фундаменталната елипса со равенката

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} = 1:$$



Црт. 3. Претставен е основен дел на реален репрезентант на имагинарен дел од коника k врз дел на прамен од паралелни прави (O_∞), што е еднаквострана хипербола, која е комплементарна во однос на фундаментална кружница k.

а) на праменот од паралелни прави $y = \mu$, се добива хипербола $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$, чија имагинарна оска има правец на правите од дадениот прамен $y = \mu$;

б) на праменот од паралелни прави $x = \nu$, наоѓаме дека е пак хипербола но со нејзина реална оска во правец на x-оската $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$, каде се потврдува дека правецот на имагинарната оска е паралелен со правите на праменот $x = \nu$.