Математички Билтен
Книга 2 (XXVIII), 1978, (13—28)
Скопје — Југославија

ПРИЛОГ КОН ИМАГИНАРНИТЕ КОНИКИ СО ПРЕЗЕНТИРАЊЕ НА НИВНИОТ РЕАЛЕН РЕПРЕЗЕНТАНТ

Стево М. Матески

1. УВОД

Во трудов ја изнесуваме познатата определба за имагинарната коника, како и нејзините видови: имагинарната кружница и имагинарната елипса. Потоа воведуваме поим за имагинарен дел на реална пресечна коника на рамнина со некоја квадрика, на оној дел на праменот од прави кои таа крива реално не ја сечат. Исто така разгледуваме имагинарен дел на имагинарна пресечна коника врз сите прави на праменот од прави. Понатаму го користиме поимот за реален репрезентант на парот конјугирано имагинарни двојни точки на елиптична инволуција на дадениот носител со помош на симетричните точки во однос на центарот на инволуцијата. Пристапуваме кон дефинирање реален репрезентант на имагинарен дел на коника врз прави на еден прамен од прави, кои реално не ја сечат дадената коника. Анализирајќи го реалниот репрезентант на имагинарен дел на коника на прамен од прави со центар P, докажуваме дека тој е реална рамнинска криза од четврти ред со двојна точка во центарот на тој прамен. И на крајот, земајќи го во разгледување праменот од паралени прави, установуваме дека споменатата рамнинска крива од четврти ред се распаѓа на реална коника и двојна права на проективната рамнина.

2. ПОЗНАТА ДЕФИНИЦИЈА ЗА ИМАГНИНАРНА КОНИКА

Задаваме квадрика $\varnothing$ и надвор од неа произволна точка P (пол), за која наоѓаме поларна рамнина П во однос на квадриката $\varnothing$. Потоа со проективната рамина П ја сечеме споменатава квадрика $\varnothing$ во пресечна коника к. На сите прави во рамнината П постои инволуција на низи од конјугирани точки, која е заедничка во однос на квадриката $\varnothing$ и во однос на пресечната коника к. Земаме една права p во таа рамнина П што ја продира квадриката $\varnothing$ во две точки. Тие точки се двојни точки на инволуцијата од конјугирани точки врз носителот. p. Имено:

1° две различни реални точки (пресечни точки на правата p со кониката k, односно влезна и излезна продорна точка со квадриката $\varnothing$), ги дефинираат двојните реални точки на хиперболичната инволуција од конјугирани точки на правата p како носител.

2° две коинцидентни точки, т.е. кога правата p е тангента на кониката k и на квадриката $\varnothing$, определуваат двојна реална точка на параболичната инволуција на правата p и

3° пар конјугирано имагинарни продорни точки (правата p не ја сече реално кониката k, ниту реално ја продира квадриката $\varnothing$), претставуваат двојни имагинарни (комплексни) точки на елиптичната инволуција од конјугирани точки на низата p.

Нека поларната рамнина Π ја сече реално квадриката $\varnothing$. Во таа рамнина постојат прави што реално ја продираат споменатава површина. Геометриско место на двојните точки на хиперболичната инволуција од конјугирани точки во однос на квадриката $\varnothing$ на тие прави, ја прават (образуваат) реалната пресечна коника.

Земаме нова поларна рамнина Π_1, која реално не ја сече квадриката $\varnothing$. На сите прави од таа рамнина се наоѓаат имагинарни продорни точки. Тие ги дефинираме како конјугирано имагинарни двојни точки на елиптичната инволуција на односните прави, кои прават на тие прави конјугирани точки во однос на квадриката $\varnothing$. Геометриско место на така дефинираните точки претставува имагинарна пресечна коника. Бидејќи реални прави во рамнината има ∞^2, како поле од прави, форма од втора група, споменатово геометриско мето на конјугирано имагинарни двојни точки ја покрива целата рамнина Π_1, т.е. кониката k има ∞^2 конјугирано имагинарни точки.

Треба да се забележи дека имагинарната (пресечна) коника може да се зададе без квадриката.

2.1. Видови имагинарни коники

2.1. а) Имагинарна кружница. Ако зададеме прамен од прави (R) со елиптични инволуторни низи од конјугирани точки со заеднички центар R и со еднаква инволуторна константа на тие низи, на тој начин сме определиле имагинарна кружница. Симетричните точки на елиптичната инволуција на тие низи лежат на реална кружница. Имагинарната кружница како геометриско место на конјугирано имагинарните двојни точки на односните низи е слична и хомотетична со реалната кружница на симетричните точки на истите инволуторни низи, двете овие кружници имаат заеднички апсолутно кружните точки на таа рамнина. Имагинарниот радиус на имагинарната кружница е еднаков со радиусот на споменатава реална кружница помножен со факторот i (каде е $i = \sqrt{-1}$).

2.1. б) Имагинарна елипса. Земаме ли прамен од прави со елиптични инволуторни низи со заеднички центар (носител), кои се наоѓаат на реалните прави од тој центар така што симетрични точки на тие низи да припаѓаат на реална елипса, велиме дека со тоа е зададена имагинарна елипса. Имагинарната елипса како геометриско место на коњугирано имагинарните двојните точки на дадените инволуторни низи е слична и хомотетична со реалната елипса на симетричните точки на односните инволуторни низи, бидејќи со неа ѝ се заеднички коњугирано имагинарните бескрајни точки.

Хиперболата има секогаш две реални бескрајни точки, поради тоа не егзистира имагинарна хипербола, туку може да постои само дел на имагинарна хипербола.

Исто така не постои ниту имагинарна парабола, туку може да има само нејзин дел, бидејќи секогаш содржи реална бескрајна точка, која е допирна на бескрајната тангента. Таа е бескрајна права на рамнината на која припаѓа параболата.

3. НАШ ПРИЛОГ КОН ИМАГИНАРНИТЕ КОНИКИ

Нека земеме центар S на прамен од прави (S) во поларната рамнина П, која реално ја сече некоја квадрика $\varnothing$, но така што центарот S да е надвор од таа квадрика. На едните прави од праменот (S) што реално ја продираат површината $\varnothing$, се добиваат реални продорни точки, кои ги дефинираме како двојни точки на хиперболични инволуторни низи од коњугирани точки, а на другите прави од истиот прамен кои реално не ја продираат површината $\varnothing$, постојат само имагинарни продорни точки, тие ги дефинираме со парот коњугирано имагинарни двојни точки на елиптичните инволуторни низи од коњугирани точки во однос на дадената површина $\varnothing$. Поради тоа пресечната коника, која припаѓа на правите на праменот од прави (S), се состои од геометриско место на двојните реални точки на хиперболичната и коњугирано имагинарните двојни точки на елиптичната инволуција во однос на квадриката $\varnothing$. Значи, пресечната коника се состои од реален и имагинарен дел. Затоа ние во овој случај имагинарната пресечна коника, по договор, ќе ја наречеме **имагинарен дел на пресечната коника на ДЕЛОТ на посматраниот прамен од прави** (S) во однос на квадриката $\varnothing$.

Во случај кога поларната рамнина имагинарно ја сече односната квадрика, на правите на праменот од прави постојат тогаш само имагинарни продорни точки, кои ги дефинираме со помош на парот коњугирано имагинарните двојни точки на елиптичните инволуторни низи од коњугирани точки во однос на дадената површина. Геометриското место на коњугирано имагинарните двојни точки на таа инволуција на сите прави на праменот од прави, по договор, ќе го наречеме **имагинарен дел на пресечната коника на ЦЕЛИОТ прамен од прави** во однос на квадриката $\varnothing$.

Во колку земеме нов центар R на прамен од прави (R) во истата рамнина П, се менува положбата на правите од праменот (R) во однос на квадриката $\varnothing$, споредени со положбата што ја имаа правите на праменот од прави (S). И покрај тоа реалниот дел на пресечната коника останува фиксен, додека се менува нејзиниот имагинарен дел. Имено на дел на правите од праменот (R) се добиваат нови коњугирано имагинарни двојни точки на елиптичната инволуција од коњугирани точки во однос на пресечната реална коника и во однос на квадриката $\varnothing$, Бидејќи во една рамнина има ∞^2 реални точки како поле од точки, што е форма од втора група, постојат и безброј можности од ∞^2 прамени од прави за добивање на имагинарни делови на пресечни коники во проективната рамнина П во однос на квадриката $\varnothing$, како и во однос на реалниот дел на пресечната коника.

Поради тоа го разгледуваме понатаму имагинарниот дел на пресечната коника само на еден прамен од прави.

Досега имагинарната пресечна крива ја определувавме секогаш во однос на кадрика, односно во однос на реална пресечна коника што лежи во поларната рамнина П. Отстранувајќи ја површината $\varnothing$ ќе се задржиме на прамен од прави (S) и на реална коника, воспоставувајќи на правите од праменот што реално не ја сечат таа крива, елиптични инволуции на конјугирани точки во однос на зададена реална коника, со тоа што ќе ја користиме поларноста во рамнината П.

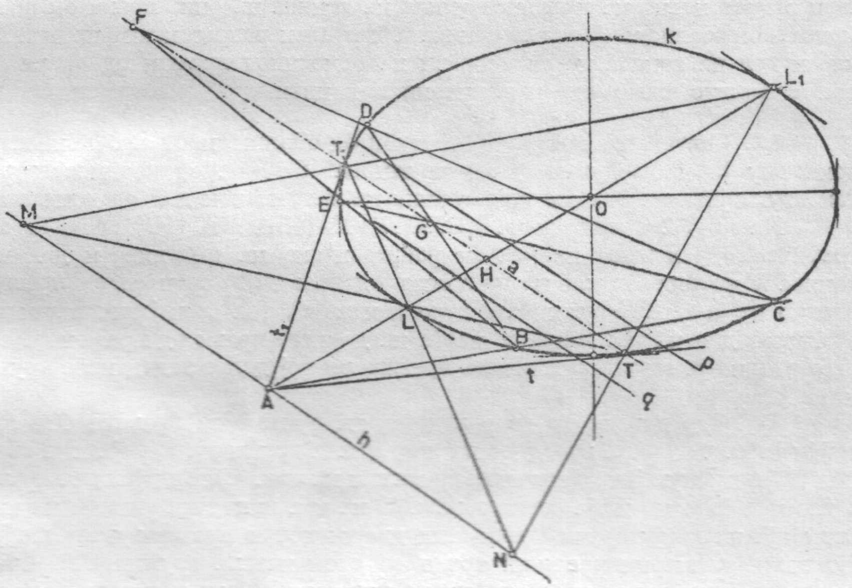
4. ВОВЕДУВАЊЕ НА ПОИМОТ ЗА РЕАЛЕН РЕПРЕЗЕНТАНТ НА ИМАГИНАРНА КОНИКА

Назив за реален репрезентант на имагинарен дел на крива од втор ред (конусен пресек) на прамен од прави се јавува кај Х. Винер (Chr. Wiener) (1), Bd. I., стр. 315. Винер зема во рамнината на кривата од втор ред m прамен од прави со центар P надвор од дадената крива m. Потоа определува на свој начин реални репрезентанти на парот конјугирано имагинарни точки на оние прави од праменот кои реално не ја сечат кривата m. Геометриско мето на така добиените точки врз дел на правите на праменот од прави е крива од втор ред l. Кривата (конусниот пресек) l во една рамнина Винер ја нарекол конјугирана крива кон конусниот пресек m во однос на една точка (пол) P, односно во однос на нивната заедничка полара p. Ако е полот P внатре во кривата m, кривата l станува целата имагинарна.

Поимот реален репрезентант на имагинарен конусен пресек (коника) се среќава и кај Е. Милер—Е. Крупа (E. Müller—E. Kruppa) /5/, Bd. I., стр. 32. Тие придружуваат на имагинарниот конусен пресек реална елипса, при што симетричните точки на елиптичната инволуција од конјугирани точки на дијаметрите од имагинарна, недегенерирана крива од втор ред (конусен пресек) C даваат реална елипса C_r.

Ние ќе го ВОВЕДЕМЕ поимот за реален репрезентант на имагинарна коника на прамен од прави со модификација на постапката на Х. Винер. За таа цел ќе го користиме начинот за одредување симетрични точки на елиптична инволуција на права што реално не ја сече кружницата, така добиените точки претставуваат реални репрезентанти на имагинарните пресечни точки, презентирано од В. Ниче (V. Niče) /6/, стр. 58.

4.1. Образложение со наша дополна. Ја земаме елипсата k како претставител на сите коники (црт. 1.). Во нејзината проективна рамнина задаваме некоја права h, така што таа реално не ја сече кривата k. Потоа го конструираме полот H на зададената полара h во однос на кониката k. Низ полот H повлекуваме права која минува низ центарот O на кривата k. Овој дијаметар НО кривата ја сече во дијаметрално спротивни точки L, L_1 (кај хиперболата овие пресечни точки се наоѓаат на двете нејзини гранки, додека при параболата едната е реална точка L а другата бескрајна точка $L_{1\infty}$ на дијаметарот). Таа сврзница HO ја пресекува поларата h во точка A, која е центар на елиптичната инволуција на носителот h во однос на кривата k. Пресечните точки L, L_1 и T, T_1 определуваат полн четиритеменик LTL_1T_1 впишан во кривата k, кој на правите a, h дефинира инволуторни низи од конјугирани точки,



Црт. 1. Одредени се симетрични точки M, N во однос на центар на елиптична инволуција A на носител h по однос на елипса k.

чии двојни точки се пресечни точки на споменатите прави со кривата k. Одредувајќи го автополарниот триаголник HMN на кривата k со помош на споменатиот четиритеменик, се добива на првата h инволуторен пар точки M, N што се еднакво оддалечени во однос на точката A. Така добиените точки M, N ги нарекуваме симетрични точки на елиптичната инволуција на правата (поларата) h и ги земаме да ги претставуваат реалните репрезентанти на имагинарните пресечни точки со кривата k.

Конструктивната постапка се поедноставува кога кониката k е кружница и овозможува поцелисходни испитувања.

Ако дефинираме на претходниов начин симетрични точки во однос на центарот на елиптичната инволуција од конјугирани точки на правите од некој прамен од прави во однос на некоја коника, која се наоѓа во рамнината на тој прамен, геометриското место на сите така добиени симетрични точки определува еднозначна реална крива. По договор, така најдената крива ќе ја наречеме **реален репрезентант на имагинарен дел на коника врз делот на праменот од прави** во однос на дадената коника.

Реален репрезентант на имагинарен дел на коника врз дел на еден прамен од прави, воопшто е рамнинска крива од четврти ред со двојна точка во центарот на истиот прамен.

Со оглед на тоа дека разликуваме делови на имагинарна коника на делот и на целиот прамен од прави, респективно постои реален репрезентант на имагинарен дел на коника на оние прави од праменот, кои реално не ја сечат кониката и реален репрезентант на имагинарен дел на коника на сите прави на односниот прамен од прави, а тоа е можно само кај имагинарните коники.

4.2. Синтетичен доказ. Не се губи од обопштеност ако кониката понатаму ја набљудуваме како кружница. Со тоа се поедноставува конструкцијата на реалниот застапник на имагинарен дел од кониката.

На црт. 2 е прикажана КОНСТРУКТИВНАТА ПОСТАПКА за графичко одредување на реален репрезентант на имагинарен дел на коника k на оние прави на праменот од прави (O) со носител O, кои реално не ја сечат кружницата k со центар C, тоа се нејзини пасанти. Реалниот дел на таа крива се наоѓа на другите прави од праменот (O) што реално ја сечат кружницата k; заправо тој дел е зададената кружница k.

Тоа одредување ќе го изведеме, на пример за правата OM земајќи ја како полара во однос на постојната кружница k, која има свој пол D (применувајќи го начинот прикажан на црт. 1.). Бидејќи таа права е пасанта (реално не ја сече кривата k) на неа индицира елиптична инволуција на конјугирани точки, чии двојни точки претставуваат конјугирано имагинарни пресечни точки со споменатава кружница k. Сврзницата на центарот на елиптичната инволуција P на поларата OM со полот D означува дијаметрална права на кружницата k, бидејќи минува низ нејзиното средиште C, неа ја сече во две реални различни точки. Земајќи ги овие точки како центри (носители) на два проективно кореcподентни прамени од прави што ја формираат дадената кружница k, низните кореcподентни прави ќе ги сечат поларите OM и AB во колокални проективни низи, чии двојни точки ги фиксираат нивните пресечни точки со кружницата k. Полот P, односно D, со заедничката бескрајна точка на споменативе полари даваат инволуторно придружен (кореcподентен) пар. Кореcподентите прави од двата проективна прамена што минуваат низ точката A ја сечат правата OM во пар придружени точки M, N, како и оние кореcподентни прави низ точката B определуваат пар инволуторно придружени точки M, N. Поради заемна нормалност на правите CP и AB, паралелноста на поларите OM, AB и $\overline{AD} = \overline{DB}$, се добива $\overline{MP} = \overline{PN}$. Имено паротконјугирани точки M, N се бараните симетрични точки на елиптичната инволуција на поларата