Математички Билтен
Книга 2 (XXVIII), 1978, (37—49)
Скопје — Југославија

ЗА МОЖНОСТИТЕ НА ОБОПШТУВАЊЕ НА МЕТОДАТА НА ЛАГРАНЖ ЗА ВАРИЈАЦИЈА НА КОНСТАНТИ

Драган Димитровски и Борко Илиевски

По повод 70-годишнината на професорот Митриновиќ, чии први предавања по Диференцијални равенки се наоѓаат во ретките тетратки на првата генерација македонски математичари.

Целта на овој труд ќе биде истражувањето на можностите, врз некои класи диференцијални равенки од вид

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

да може да се примени Лагранжевата метода на варијација на константи. Еден успешен приод кон слични прашања, кој инспирира, е даден во работите на Ј. Кечкиќ, [1], [2].

Нека за соодветната хомогена равенка на (1)

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \tag{2}$$

е позната една фундаментална система партикуларни интеграли

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}; \quad W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0 \tag{3}$$

па според тоа и општото решение

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_k \tag{4}$$

Ние во основните црти ќе ја задржиме Лагранжевата постапка. Прво ќе претпоставиме дека константите C_k се некои функции од x: $C_k = C_k(x)$, па ќе се опитаме да побараме општо решение на (1) во вид:

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k \tag{5}$$

каде n-те произволни функции $C_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ ќе ги определиме од некои $n-1$ услови кои само подесно ги избираме, и од условот (5) да задоволува (1). Ние ќе ги задржиме Лагранжевите претпоставки за изводите при еднoподруго диференцирање:

$$\sum_{k=1}^{n} C'_k \cdot y_k^{(\nu)} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2 \tag{6}$$

и така ги имаме традиционалните услови, $n-1$ на број, за изводите на (5), кои така гласат:

$$y^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot y_k^{(\nu)}; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{7}$$

Диференцирајќи (7) уште еднаш, и заменувајќи во (1), го добиваме и n-тиот услов за определување на $C_k(x)$. Се повторува познатата система на Лагранж, која што е линеарна алгебарска система по изводите $C'_k(x)$, само овој пат десната страна на последната равенка е посложена, и зависи од функциите $C_k(x)$:

$$\begin{aligned}
&C_1' \, y_1 + C_2' \, y_2 + \ldots + C'_n \, y_n = 0 \\
&C_1' \, y_1' + C_2' \, y_2' + \ldots + C'_n \, y'_n = 0 \\
&-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\
&C_1' \cdot y_1^{(n-2)} + C_2' \, y_2^{(n-2)} + \ldots C'_n \, y_n^{(n-2)} = 0 \\
&C_1' \, y_1^{(n-1)} + C_2' \, y_2^{(n-1)} + \ldots + C'_n \, y_n^{(n-1)} = \\
&= f\left(x, \sum_{k=1}^{n} C_k \, y_k, \sum_{k=1}^{n} C_k \, y'_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} C_k \, y_k^{(n-1)}\right)
\end{aligned} \tag{8}$$

Затоа ние во системата (8) ќе ги одделиме првите $n-1$ равенки од последната, така да првите $n-1$ константи:

$$C_1', \; C_2', \; C_3', \ldots, \; C'_{n-1}$$

можеме сите да ги изразиме преку последната $C'_n(x)$:

$$\begin{aligned}
&C_1' \, y_1 + C_2' \, y_2 + \ldots + C'_{n-1} \cdot y_{n-1} = - C_n' \cdot y_n \\
&C_1' \, y_1' + C_2' \cdot y_2' + \ldots + C'_{n-1} \cdot y'_{n-1} = - C_n' \cdot y_n' \\
&-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\
&C_1' \cdot y_1^{(n-2)} + C_2' \cdot y_2^{(n-2)} + \ldots + C'_{n-1} \cdot y_{n-1}^{(n-2)} = - C'_n \cdot y_n^{(n-2)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Под услов новата вронскијана

$$W^* = W(y_1, y_2, \dots y_{n-1}) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & y'_{n-1} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

решението $C_i'(x)$ е еднозначно

$$C_i'(x) = (-C'_n(x)) \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & \dots & y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & \dots & y'_{n-1} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}}{W^*} =$$

$$= (-C'_n(x)) \frac{W_{i, n-1}}{W(y_1, y_2, y_3 \dots y_{n-1})}$$

за $i = 1, 2, \dots, n-1$, и сите изводи на $C_i'(x)$ се изразени преку изводот на последната функција $C'_n(x)$. Заменувајќи, во последната, n-тата равенка, имаме

$$(-C_n'(x)) \left[y_1^{(n-1)} \frac{W_{1, n-1}}{W^*} + y_2^{(n-1)} \frac{W_{2, n-1}}{W^*} + \right.$$

$$\left. + \dots + y_{n-1}^{(n-1)} \frac{W_{n-1, n-1}}{W^*} - y_n^{(n-1)} \right] =$$

(10) $$= (-C'_n(x)) \frac{W(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)}{W(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})} =$$

$$= f\left(x, \sum_{k=1}^{n} C_k y_k, \sum_{k=1}^{n} C_k y_k', \dots, \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)}\right).$$

Оваа последна диференцијална равенка (10) содржи само извод C_n', и сите други функции без изводи, и е од облик:

(10) $$C_n'(x) = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n; C_1, C_2, \dots, C_n(x))$$

Ако *специјално* во (1) одбереме f така таа по смените за y, y', y'', ... $y^{(n-1)}$ *да зависи само од* $C_n(x)$ експлицитно, и уште ако такво f позволува и квадратурно решение на вака избраната равенка (10):

(11) $$C'_n(x) = \varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, C_n(x))$$

добиваме $C_n(x)$ во функција од системата $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ и една нова интеграциска константа. Од другите равенки лесно ги наоѓаме другите константи $C_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, само со уште по една квадратура:

$$C_i(x) = \gamma_i - \int C_n'(x) \cdot \frac{W_{i, n-1}}{W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}$$

а со тоа и општото решение на равенката (1), во општ случај нелинеарна. Со оглед на големата општост на равенката (1), такви специјални избори на f со цел f да зависи само од C_n и да биде квадратурно решлива, се покажува да се можни, и тоа со запазување на значајна општост. Така би имале една генерализација на класичната метода на Лагранлж на варијација на константите.

Да илустрираме неколку примери.

1. Равенката (1) е од втор ред со десна страна билинерна функција од y, y′

Да посматраме диференцијална равенка од облик:

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f\left(\frac{A(x)\, y' + B(x)\, y + C(x)}{A^*(x)\, y' + B^*(x)\, y + C^*(x)}\right) \tag{11}$$

Нека соодветната хомогена равенка $y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$ е решена со $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Претпоставувајќи да се $C_i = C_i(x)$; диференцирајќи го решението, поставувајќи го првиот Лагранжев услов $C_1'\, y_1 + C_2'\, y_2 = 0$, имаме по извршената замена во десната страна:

$$f\left(\frac{C_1(Ay_1' + By_1) + C_2(Ay_2' + By_2) + C(x)}{C_1(A^* y_1' + B^* y_1) + C_2(A^* y_2' + B^* y_2) + C^*(x)}\right).$$

За да ова зависи само од C_2 преку константни коефициенти, треба да важи:

$$Ay_1' + By_1 = 0 \qquad A^* y_1' + B^* y_1 = 0$$

$$Ay_2' + By_2 = \varphi,\ C(x) = \beta,\ A^* y_2' + B^* y_2 = \gamma;\quad C^*(x) = \text{const.}$$

од која система ги определуваме оние биленеарни функции од y, y', кои се подложни на методата на варијација на константи. Добиваме следна:

Теорема. Равенката

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f\left(\frac{\alpha(y_1 y' - y_1' y) + W\beta}{\gamma(y_1 y' - y_1' y) + W\delta}\right) \tag{12}$$

$$\alpha, \beta, \gamma, = \text{const.};\ \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0;$$

е решлива со методата на варијација на константи, ако соодветната хомогена линерана диференцијална равенка:

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$$

е решена со

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2; \quad W = W(y_1, y_2) \neq 0.$$

Навистина, Лагранжевата система за определување на константите гласи:

$$C_1'\, y_1 + C_2'\, y_2 = 0$$

$$C_1'\, y_1' + C_2'\, y_2' = f\left(\frac{\alpha\, C_2 + \beta}{\gamma\, C_2 + \delta}\right)$$

Со елиминација на C_1' добиваме за C_2 квадратурно решлива равенка:

$$C_2' = \frac{y_1}{W}\, f\left(\frac{\alpha\, C_2 + \beta}{\gamma\, C_2 + \delta}\right).$$

Ако истата ја решиме низ квадратурите:

$$\int \frac{d\, C_2}{f\left(\dfrac{\alpha\, C_2 + \beta}{\gamma\, C_2 + \delta}\right)} = \int \frac{y_1}{W}\, dx + M$$

и ако C_2 решиме експлицитно, тоа ќе биде:

$$C_2 = \Psi(x, y_1, y_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta, M);$$

тогаш е

$$C_1 = N - \int \frac{y_2}{y_1}\, \Psi(x, M)\, dx$$

и општото решение на нелинеарната равенка ќе гласи:

$$y = N\, y_1 - y_1 \int \frac{y_2}{y_1}\, \Psi(x, M)\, dx + y_2\, \Psi(x, M)$$

ПРИМЕР. Лесно изводливи квадратури до крај имаме ако е $\alpha = 0$. Тогаш равенката

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = \frac{W \cdot \beta}{\gamma\,(y_1\, y' - y_1'\, y) + W\, \delta}$$

е решлива низ квадратури по метода на варијација на константи, ако е решена соодветната хомогена равенка. Нејзиното решение гласи:

$$y = By_1 \mp y_1 \int \frac{y_2}{y_1} \left(\frac{d}{dx} \sqrt{A + \frac{\delta}{\gamma^2} + 2\beta \int \frac{y_1}{W}\, dx} \right) dx +$$

$$+ y_2 \left(- \frac{\delta}{\gamma} \pm \sqrt{A + \frac{\delta^2}{\gamma^2} + 2\beta \int \frac{y_1}{W}\, dx} \right),$$

каде A, B се интеграциони константи, y_1, y_2 со $W(y_1, y_2) \neq 0$ партикуларни интегради на $y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$, β, γ, δ дадени константи.

2. Равенката (1) е од втор ред со десна страна квадратна функција од y, y′

Да посматраме равенка од облик:

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = Ay^2 + Byy' + Cy'^2 + Dy + Ey' + \varphi(x) \tag{13}$$

Ако равенката $y'' + ay' + by = 0$ е решена со $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, $W(y_1, y_2) \neq 0$ тоа имаме система на Лагранж за овој случај:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$$

$$\begin{aligned} C_1' y_1' + C_2' y_2' = {} & \varphi(x) + C_1^2 [Ay_1^2 + By_1 y_1' + Cy_1'^2] + C_1 C_2 [2A\, y_1 y_2 + \\ & + B(y_1 y_2' + y_2 y_1') + + 2\, Cy_1' y_2'] + C_2^2 [Ay_2^2 + By_2 y_2' + Cy_2'^2] + \\ & + C_1 [Dy_1 + Ey_1'] + C_2 [Dy_2 + Ey_2'] \end{aligned} \tag{14}$$

За да десната страна f на последната равенка зависи само од C_2, добиваме специјални услови во вид на системата равенки:

$$Ay_1^2 + By_1 y_1' + Cy_1'^2 = 0$$

$$2\, A\, y_1 y_2 + B\, (y_1 y_2' + y_2 y_1') + 2\, C\, y_1' y_2' = 0$$

$$Dy_1 + Ey_1' = 0$$

од каде добиваме:

$$A(x) = C(x) \left(\frac{y_1'}{y_1} \right)^2; \;\; B(x) = -2\, C(x) \frac{y_1'}{y_1}; \;\; D(x) = -E(x) \cdot \frac{y_1'}{y_1}$$

а со тоа и специјална подкласа нелинеарни равенки решливи со метода на варијација на константи. Можеме да формулираме:

Теорема. Нелинеарната равенка

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = \varphi(x) + C(x)\left[y' - \frac{y_1'}{y_1}y\right]^2 + E(x)\left[y' - \frac{y_1'}{y_1}y\right] \tag{15}$$

каде $\varphi(x)$, $C(x)$ се потполно произволни функции, а $E(x)$ зависи од нив на следниот начин:

$$E(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\left[\left(\frac{y_1}{w}\right)^2 \cdot \frac{\varphi}{c}\right]'}{\left(\frac{y_1}{w}\right)^2 \cdot \frac{\varphi}{c}} \tag{15'}$$

е решлива со метода на варијација на константи ако е познато решението на соодветната хомогена линеарна равенка.

Навистина, опишаниот метод не доведува до системата константи:

$$C_1'\,y_1 + C_2'\,y_2 = 0$$

$$C_1'\,y_1' + C_2'\,y_2' = \varphi(x) - C_2^2\,C(x)\left(\frac{w}{y_1}\right)^2 + C_2\,E(x)\cdot\frac{w}{y_1}$$

од каде за C_2 ја имаме следната равенка Рикати:

$$C_2' = \frac{y_1}{w}\varphi(x) - C_2^2 \cdot C(x)\frac{w}{y_1} + C_2 \cdot E(x)$$

која што ќе ја решиме по методата на Митриновиќ [3], според која равенката Рикати:

$$y' = -f\,y^2 + \Phi\,y + h$$

е решлива низ квадратури ако важи:

$$2g = 4\sqrt{fh} + \frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}, \quad \Phi = g - 2\sqrt{fh}$$

Тогаш $y = \dfrac{\Phi - g}{2f}$ е еден партикуларен интеграл. Кај нас е

$$f(x) = C(x)\cdot\frac{w}{y_1}\,;\;\; h = \frac{y_1}{w}\varphi(x);\;\; E(x) = g - 2\sqrt{fh}$$

и замена во условите на Митриновиќ го дава горниот облик за $E(x)$. Добиваме да е

$$C_2 = -\frac{y_1}{w}\sqrt{\frac{\varphi}{c}}$$

партикуларен интеграл на равенката Рикати, и со познатата смена

$$C_2 = -\frac{y_1}{w}\sqrt{\frac{\varphi}{c}} + \frac{1}{Y}$$

ја решаваме истата по C_2. По сите потребни пресметувања го имаме општото решение на (15):

$$y = y_1\beta - y_1\int \frac{y_2}{y_1}\frac{d}{dx}\left[\frac{y_1}{w}\sqrt{\frac{\varphi}{c}}\left(\frac{e^{2\int\sqrt{\varphi c}\,dx}}{\alpha + \int e^{2\int\sqrt{\varphi c}\,dx}\sqrt{\varphi c}\,dx} - 1\right)\right]dx +$$

$$+ \frac{y_1\,y_2}{w}\sqrt{\frac{\varphi}{c}}\left[\frac{e^{2\int\sqrt{\varphi c}\,dx}}{\alpha + \int e^{2\int\sqrt{\varphi c}\,dx}\sqrt{\varphi c}\,dx} - 1\right]$$

каде α, β се интеграциски константи; y_1, y_2 линеарно независни партикуларни интеграли на $y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$, а $C(x)$, $\varphi(x)$ произволни функции.

3. Равенка (1) е нелинеарна од II ред, со десна страна неполна квадратна функција од у и у'.

Да ја земеме повторно равенката (13), но сега да претпоставиме да е $\varphi(x) \equiv 0$ и да бараме функции A, B, C, D и E такви, Лангранжевата втора равенка да има десна страна од облик $\Phi(x)\,C_2^2 + \Psi(x)\,C_2$; т. е да добиеме една квадратурно решлива Бернулиева равенка. Со иста постапка како во 2. добиваме Лагранжева система:

$$C_1'\,y_1 + C_2'\,y_1 = 0$$

$$C_1'\,y_1' + C_2'\,y_2' = C\frac{W}{y_1^2}\,C_2^2 - E\frac{W}{y_1}\,C_2$$

од каде следува една равенка Бернули по C_2:

$$C_2' = E(x)\,C_2 - \frac{W}{y_1}\,C(x)\cdot C_2^2$$

Откако ќе најдеме C_2, а потоа C_1, можеме да ја формулираме следната:

Теорема. Нелинеарната диференцијална равенка од II ред:

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = E(x)\left(y' - \frac{y_1'}{y_1}\, y\right) - C(x)\left(\frac{y_1'}{y_1}\, y - y'\right)^2 \tag{16}$$

каде $E(x)$ и $C(x)$ се потполно произволни функции од x, ако е решена равенката $y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$ може да се реши по Лагранжевата метода на варијација на константите.

Општото решение на (16) гласи:

$$y(x) = \beta y_1 - y_1 \int \frac{y_2}{y_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\int E(x)\,dx}}{\alpha + \int e^{\int E(x)\,dx} \cdot \frac{w(y_1, y_2)}{y_1}\, C(x)\, dx}\right) dx +$$

$$+ \frac{y_2 \cdot e^{\int E(x)\,dx}}{\alpha + \int e^{\int E(x)\,dx} \cdot W(y_1, y_2)\, \frac{C(x)}{y_1}\, dx}$$

каде α, β се интеграциски конснатни, y_1, y_2 еден фундаментален пар партикуларни интеграли на соодветната хомогена равенка, $W(y_1, y_2) \neq 0$

4. Уште една класа линеарни нехомогени равенки од II ред, решливи со варијација на константи.

Да ја посматраме равенката (1) за $n = 2$, т.е. во обликот:

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x, y, y') \tag{17}$$

каде за f ќе претпоставиме да е линеарна функција по y и y':

$$f(x, y, y') = A(x)\, y + B(x)\, y' + \varphi(x) \tag{17'}$$

Формираме Лангранжева система:

$$C_1'\, y_1 + C_2'\, y_2 = 0$$

$$C_1'\, y_1' + C_2'\, y_2' = \varphi(x) + A(C_1 y_1 + C_2 y_2) + B(C_1 y_1' + C_2 y_2')$$

За да последната десна страна зависи само од C_2, имаме услов:

$$A\, y_1 + B\, y_1' = 0$$

а со елиминација на C_1' имаме линеарна равенка по C_2:

$$C_2' - B \cdot C_2 - \frac{y_1}{w} \varphi(x) = 0$$

така да по наоѓање на C_1, C_2 можеме да ја формулираме следната теорема:

Теорема. Линеарната нехомогена диференцијална равенка од II ред со 4 произволни функции

$$y'' + [a(x) - B(x)]\, y' + \left(b(x) + B(x)\frac{y_1'}{y_1}\right) y = \varphi(x) \tag{18}$$

ако е решена соодветната хомогена равенка:

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0 \text{ со } y = C_1 y_1 + C_2 y_2; \quad W(y_1, y_2) \neq 0$$

може да се реши по методата на Лагранж на варијација на константи.

Општото решение на (18) гласи:

$$\begin{aligned} y = \beta y_1 + \alpha y_2 e^{\int B\,dx} + y_2 \int e^{-\int B\,dx} \frac{y_1}{w} \varphi(x)\, dx - \\ - y_1 \left[\alpha \int \frac{y_2}{y_1} B e^{\int B\,dx} + \int \frac{y_2}{y_1} \frac{d}{dx}\left(e^{\int B\,dx} \int e^{-\int B\,dx} \frac{y_1}{w} \varphi(x)\, dx \right)\right] \end{aligned} \tag{19}$$

каде α, β — се интеграциони константи.

За $B(x) \equiv 0$ имаме вообичаена Лагранжева постапка, а за $\varphi(x) \equiv 0$, нова хомогена равенка:

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = B(x)\left(y' - \frac{y_1'}{y_1} y\right)$$

која очигледно има еден исти партикуларен интеграл y_1, како и дадената хомогена, па е можно намалувањето на редот. Резултатот (19) е очигледно истовремена последица и на постаката за намалување на редот, и на Лангранжевата метода за варијација на константи при нехомогени линеарни равенки.

5. Линеарни нехомогени равенки од III ред.

Да посматраме равенка од III ред:

$$y''' + a(x)\, y'' + b(x)\, y' + C(x)\, y = f(x, y, y', y'') \tag{20}$$

под претпоставка да е f општа линеарна функција од y, y', y'':

$$f = \varphi(x) + A(x)\, y + B(x)\, y' + C(x)\, y''.$$

Нека е соодветната хомогена равенка:

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0$$

решена со

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3; \quad W(y_1, y_2, y_3) \neq 0.$$

Барањето, функцијата f по замената на y, $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3'$, $y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3''$. да зависи само од C_3, доведува до ограничување меѓу коефициентите:

$$A(x) = - C(x) \frac{y_1'' y_2' - y_1' y_2''}{W(y_1, y_2)}; \quad B(x) = - C(x) \frac{(y_1 y_2'' - y_1'' y_2)}{W(y_1, y_2)}$$

така да од системата на Лагранж добиваме:

$$C_1' = - C_3' \frac{y_3 y_2' - y_2 y_3'}{y_1 y_2' - y_1' y_2}; \quad C_2' = - C_3' \cdot \frac{y_1 y_3' - y_1' y_3}{y_1 y_2' - y_1' y_2};$$

и

$$C_3' - C(x)\, C_3 - \varphi(x) \cdot \frac{W(y_1, y_2)}{W(y_1, y_2, y_3)} = 0.$$

Така можеме да ја формулираме следната:

Теорема. Линеарната нехомогена диференцијална равенка од III ред:

$$y''' + a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = \varphi(x) - \frac{C(x)}{W(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2'' & y_2' & y_2 \end{vmatrix} \tag{21}$$

која содржи 5 произволни функции, ако е решена соодветната хомогена равенка од левата страна, може да се реши по методата на Лагранж на варијација на константи.

Општото решение на (21) гласи

$$y = \beta y_1 + \gamma y_2 + \alpha y_3\, e^{\int C(x)\, dx} -$$

$$- y_1 \int \frac{y_3 \cdot y_2' - y_2 y_3'}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \cdot \lambda(x)\, dx - y_2 \int \frac{y_1 y_3' - y_1' y_3}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \lambda(x)\, dx +$$

$$+ y_3 \int e^{-\int C\, dx} \frac{\varphi(x)\, W(y_1, y_2)}{W(y_1, y_2, y_3)}\, dx \tag{22}$$

каде е

$$\lambda(x)=\frac{\varphi(x)\,W(y_1,y_2)}{W(y_1,y_2,y_3)}+\alpha\,Ce^{\int C\,dx}+C\,e^{\int C\,dx}\int e^{-\int C\,dx}\frac{\varphi(x)\,W(y_1,y_2)}{W(y_1,y_2,y_3)}\,dx$$

и α, β, γ — интеграциски константи.

Ако е $C\equiv 0$, очигледно добиваме вообичени Лагранжеви формули за III ред. Ако е $C\not\equiv 0$, а $\varphi(x)\equiv 0$, тоа имаме хомогена равенка од III ред:

$$(23)\qquad y'''+a(x)\,y''+b(x)\,y'+C(x)y=-\frac{C(x)}{W(y_1,y_2)}\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2'' & y_2' & y_2 \end{vmatrix}$$

која што со дадената хомогена има заеднички 2 партикуларни интеграла y_1, y_2; што е очевидно. Тогаш решението (22) содржи и намалување на редот, а не само третман на нехомогената равенка, така да во општото решение на (23), наместо две постапки за намалување на редот, имаме квадратури со константите. Тоа општо решение гласи:

$$y=\beta y_1+\gamma y_2+\alpha\,e^{\int C(x)\,dx}\,y_3-$$

$$-\alpha y_1\int\frac{W(y_3,y_2)}{W(y_1,y_2)}\,C(x)\,e^{\int C(x)\,dx}-\alpha y_2\int\frac{W(y_1,y_3)}{W(y_1,y_2)}\,C\,e^{\int C\,dx}.$$

На крајот, да забележиме дека се можни генерализации како во изборот на f, така и во висината на редот n на равенката.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Кечкиќ: A completement to Komke's treati se; On generalised Emden equation• Publ. Elektrotehn- fac. Univ. Beograd,
2. J. Кечкиќ: A cliplefemeut to Kamnn treoli se; Some th (ne jasno, napišajte po jasno)
3. Д. С. Митриновиќ: „Sur l'équation diff. de Riccati", C. R., Paris, 1936.

SUR LA POSSIBILITE DE LA GENERALISATION DU METHODE DE LAGRANGE DE LA VARIATION DES CONTSTANTES

Dragan Dimitrovski, Borko Ilievski

Résumé

On fait un abord à la question d'employer le mèthode connu de Lagrange de la variation des constantes, sur les équations différentielles nonlinéaires de la forme

(1) $L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

suposiion faite que l'équation homogène correspondante $L(y) = 0$ est résolue. Sous la forme des diverses conditions suffisantes on détermine la fonction $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ pour que les quadratures aient lieu.