ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ НА ГРУПНАТА ОПЕРАЦИЈА НА $GL(n; R)$

Оѓњан Јошов

Целта на овој чланак е да се добијат локални координатни изрази за диференцијал на левата и десна транслација на општата линеарна група $GL(n; R)$. Со нивна помош потоа се изведува координатен израз на канонската 1-форма на $GL(n; R)$, позната формула со голема улога во теоријата на линеарни конексии.

Претходни поими, дефиниции и ознаки

Множеството диференцијабилни реални функции на реално диференцијабилно многуобразие M ($\dim M = n$) од класа C^∞ ќе се означува со $C^\infty(M)$, а множеството реални функции на M диференцијабилни во точка $p \in M$ со $C^\infty(p)$.

Ако е A алгебра над поле K, извод на A е пресликување $D: A \to A$ кое ги задоволува условите

(D_1) $D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Df$ за $\alpha, \beta \in K$, $f, g \in A$;

(D_2) $D(fg) = f(Dg) + (Df)g$ за $f, g \in A$.

Векторско поле на C^∞-многуобразие M е извод на алгебрата $C^\infty(M)$.

Множеството од сите векторски полиња на M се означува со $D^1(M)$.

Нека е $p \in M$ и $X \in D^1(M)$. Со X_p ќе се означува линеарното пресликување $f \to (Xf)(p)$ на $C^\infty(p)$ во R. Множеството $D^1(p) = \{X_p: X \in D^1(M)\}$ се вика тангентен простор на M во точката p, а неговите елементи се викаат тангентни вектори на M во p. Ако е $U \subset M$ локална отворена координантна околина во M со локален систем координати $\{x^1, \dots, x^n\}$, познато е дека операторите $X_i = \partial/\partial x^i$, $i=1, \dots, n$, формираат база на $D^1(U)$, а нивните вредности $(X_i)_p$, $i=1, \dots, n$, во произволна точка $p \in U$ формираат база на $D^1(p)$. Произволно поле $X \in D^1(U)$ се изразува преку базата $X_i, \dots, X_n$ во вид

$$(Xf)(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p (Xx^i)(p) \quad p \in U, \ f \in C^\infty(U).$$

Коефициентите на разложувањето Xx^i се означуваат и со $dx^i(X)$, што има свое оправдание според дефиницијата на диференцијални форми.

Нека е M C^∞-многуобразие и нека е $D_1(M)$ дуал на $C^\infty(M)$-модулот $D^1(M)$. Елементите на $D_1(M)$ се викаат (диференцијални) 1-форми на M.

Нека е $\{x^1, \ldots, x^n\}$ локален систем координати на локална координатна околина $U \subset M$. Операторите $dx^1, \ldots, dx^n$ дефинирани на U со релациите

$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$ (Кронекеров символ), $i, j = 1, \ldots, n$, формираат база на $D_1(U)$. Ако е $f \in C^\infty(M)$, диференцијалот df се дефинира како 1-форма ω со релацијата

$$\omega(X) = Xf, \qquad X \in D^1(M).$$

Нека е $V = m$-димензионален векторски простор и $e_1, \ldots, e_m$ некоја негова база. V-значна (диференцијална) 1-форма ω на C^∞-многуобразие M е пресликување кое на секоја точка $p \in M$ и придружува линеарно пресликување $D^1(p) \to V$. Во однос на базата $e_1, \ldots, e_m$ ω може еднозначно да се напише во вид $\omega = \omega^i e_i$ (сумирање од 1 до m), каде што ω^i се (обични) 1-форми на M. V-значната 1-форма ω е диференцијабилна ако е ω^i $(i = 1, \ldots, m)$ диференцијабилна.

Нека се M и M' C^∞-многуобразија, φ: $M \to M'$ пресликување диференцијабилно во точка $p \in M$ и $X \in D^1(p)$ тангентен вектор на M. Линеарното пресликување $Y: C^\infty(\varphi(p)) \to R$ дефинирано со релацијата $Yf = X(f \circ \varphi)$, $f \in C^\infty(\varphi(p))$, е елемент на $D^1(\varphi(p))$. Пресликувањето $X \to Y$ на $D^1(p)$ во $D^1(\varphi(p))$ се означува со $d\varphi_p$ (или φ_p) и се вика диференцијал на пресликувањето φ во p. Важна последица на оваа дефиниција е дека ако е $x(t)$ произволна крива во M низ p на која X е тангентен вектор, тогаш Y е тангентен вектор во $\varphi(p)$ на кривата $\varphi(x(t))$. За секоја 1-форма $\omega \in D_1(M')$, пресликувањето φ еднозначно дефинира 1-форма $\varphi^*\omega \in D_1(M)$ со релацијата

$$\varphi^* \omega(X) = \omega(d\varphi \cdot X) \circ \varphi, \quad X \in D^1(M).$$

Нека е G Li-група и нека се со L_a и R_a означени соодветно левата и десната транслација на произволен елемент $a \in G$. 1-форма $\omega \in D_1(G)$ се вика лево-инваријантна ако е $(L_a)^* \omega = \omega$ за секое $a \in G$. Векторско поле $X \in D^1(G)$ се вика лево-инваријантно ако е $dL_a \cdot X = X$ за секое $a \in G$. Множеството g на сите лево-инваријантни векторски полиња на G се вика Li-алгебра на G. Оваа Li-алгебра на природен начин (со пресликувањето $X \in g \to X_e$, при што се e е означен неутралниот елемент на G) се идентифицира со $D(e)$[1]). Лево-инваријантната g-значна 1-форма ψ на G, еднозначно дефинирана со релацијата

$$\psi(A) = A \text{ за секое } A \in g$$

се вика канонска 1-форма на G.

Li-групата на сите реални $n \times n$ матрици (општа линеарна група) е означена со $GL(n; R)$ а нејзината Li-алгебра со $gl(n; R)$. Со s^i_j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ е означен природниот координатеи систем на $GL(n; R)$, а со (t^i_j) матрицата $(s^i_j)^{-1}$, при што горниот индекс означува ред, а долниот колона на соодветна матрица — елемнет на $GL(n; R)$, Канонската 1-форма на $GL(n; R)$ е означена со μ, а со E^i_j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ природната база на $gl(n; R)$, односно на $D^1(e)$. Векторското поле $\partial/\partial s^i_j \in D^1(GL(n; R))$ е означено со X^j_i, а неговата вредност $(\partial/\partial s^i_j)_a$ во произволна точка $a \in GL(n; R)$ е означена соодветна со $(X^j_i)_a$.

Цел на излагањето

Основна цел е да се изведат изразите

$$dL_a \cdot W = ds^i_r(W)\, s^k_i(a)\, (X^r_k)_{ab}, \tag{1}$$

$$dR_a \cdot W = ds^i_k(W)\, s^k_m(a)\, (X^m_i)_{ba}, \tag{1'}$$

каде што a и b се произволни елементи на $GL(n; R)$, а W произволен елемент на $D^1(b)$, и со нивна помош да се добие важната формула

$$\mu = t^i_k\, ds^k_j\, E^j_i \tag{2}$$

која претставува координатен израз на канонската 1-форма μ на $GL(n; R)$.

Доказ на (1), (1') и (2)

Нека се $a, b \in GL(n; R)$ два произволни елемента. Поради својствата на линеарност, доволно е да се најде израз за дејството на dL_a и dR_a иа векторот $(X^r_m)_b = (\partial/\partial s^m_r)_b$, за фиксни вредности на r и m од множеството $\{1, \ldots, n\}$. Нека е $x^m_{r,b}(t)$ s^m_r-тата координатна линија низ b $(x^m_{r,b}(0) = b)$, имено крива во $GL(n; R)$ со координатен израз

$$s^i_j(x^m_{r,b}(t)) = s^i_j(b) + \delta^i_m \delta^r_j t \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant m,$$

δ^i_j Кронекерови симболи.

---

[1]) Во литературата се сретнува и $D^1(e)$ да се дефинира како Li-алгебра на G.

Јасно е дека $(X^r_m)_b$ е тангентен вектор на кривата $x^m_{r,b}(t)$ во точката b, што е директна последица на релациите

$$\frac{d}{dt}\, s^i_j\,(x^m_{r,b}(t)) = \delta^i_m \,\delta^r_j\,,$$

$$(X^r_m)_b = \delta^r_j \,\delta^i_m\,(X^j_i)_b\,,$$

и според тоа

$$ds^i_j\,(X^r_m)_b = \delta^r_j\,\delta^i_m = \frac{d}{dt}\, s^i_j\,(x^m_{r,b}\,(0)).$$

Од фактот дека групната операција се изразува со релациите

$$s^i_j\,(ab) = s^i_k\,(a)\, s^k_j\,(b) \qquad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n,$$

за кривата $ax^m_{r,b}(t) = L_a \cdot x^m_{r,b}(t)$ добиваме израз

$$s^i_j\,(L_a \cdot x^m_{r,b}(t)) = s^i_k\,(a)\; s^k_j\,(x^r_{m,b}(t)) = s^i_k\,(a)\; s^k_j\,(b) + s^i_k(a)\,\delta^k_m \delta^r_j\, t =$$
$$= s^i_k(a)\, s^k_j(b) + s^i_m(a)\,\delta^r_j\, t \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n, \tag{4}$$

и на сличен начин за кривата $x^m_{r,b}(t)\,a = R_a \cdot x^m_{r,b}(t)$ израз

$$s^i_j\,(R_a \cdot x^m_{r,b}(t)) = s^i_k\,(b)\; s^k_j\,(a) + \delta^i_m\, s^r_j\,(a)\, t \qquad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n. \tag{4'}$$

Од дефинициите на тангентен вектор и диференцијал на пресликување е јасно дека векторите $a \cdot (X^r_m)_b = dL_a\,(X^r_m)_b$ и $(X^r_m)_b \cdot a = dR_a\,(X^r_m)_b$ се тангентни вектори соодветно на кривите $L_a \cdot a^m_{r,b}(t)$ и $R_a \cdot x^m_{r,b}(t)$ за $t{=}0$ (соодветно во точките ab и ba). Од (4) добиваме со диференцирање по t

$$\frac{d}{dt}\, s^i_j\,(L_a \cdot x^m_{r,b}(t)) = s^i_m\,(a)\, \delta^r_j\,,$$

и следователно

$$ds^i_j\,(dL_a(X^r_m)_b) = s^i_m\,(a)\, \delta^r_j\,, \tag{5}$$

$$dL_a\,(X^r_m)_b = s^i_m\,(a)\, \delta^r_j\,(X^j_i)_{ab} = s^k_m\,(a)\,(X^r_k)_{ab}. \tag{5'}$$

На сличен начин се добива

$$\frac{d}{dt}\, s^i_j\,(R_a \cdot x^m_{r,b}(t)) = \delta^i_m\, s^r_j\,(a)$$

и според тоа

$$ds^i_j\,(dR_a\,(X^r_m)_b) = \delta^i_m\, s^r_j(a), \tag{6}$$

$$dR_a\,(X^r_m)_b = s^r_k(a)\,(X^k_m)_{ba}. \tag{6'}$$

Ако е W произволен вектор во точката b, од својствата на линеарност од (5') директно се добива

$$\begin{aligned} dL_a \cdot W &= dL_a\,(ds^i_j\,(W)\,(X^j_i)_b) = \\ &= ds^i_j\,(W)\,dL_a\,(X^j_i)_b = ds^i_j\,(W)\,s^k_i\,(a)\,(X^j_k)_{ab}, \end{aligned} \tag{7}$$

и на сличен начин од (6')

$$dR_a \cdot W = ds^i_k\,(W)\,s^k_m\,(a)\,(X^m_i)_{ba}. \tag{8}$$

Релациите (7) и (8) се заправо формулите (1) и (1') што требаше да се докажат. Аналогно на (5) и (6), често е полезно тие да се запишат во вид

$$ds^i_j\,(dL_a \cdot W) = s^i_k\,(a)\,ds^k_j\,(W), \tag{7'}$$

$$ds^i_j(dR_a \cdot W) = s^k_j\,(a)\,ds^i_k\,(W). \tag{8'}$$

Од (7) и (8) веднаш се добива израз и за диференцијалот на внатрешниот автоморфизам

$$ad(a) : b \to aba^{-1} \qquad b \in GL(n;\ R),$$

кој исто се означува со ad. Бидејќи е $(ad(a))\,b = L_a(R_{a^{-1}} \cdot b)$ имаме

$$\begin{aligned} (ad\,(a))\,W &= dL_a\,(dR_{a^{-1}} \cdot W) = dL_a\,(ds^i_k\,(W)\,s^k_m(a^{-1})\,(X^m_i)_{ba^{-1}}) \\ &= ds^i_k\,(W)\,s^k_m(a^{-1})\,dL_a\,(X^m_i)_{ba^{-1}} \\ &= s^r_i\,(a)\,ds^i_k\,(W)\,t^k_m\,(a)\,(X^m_r)_{aba^{-1}}, \end{aligned} \tag{9}$$

или

$$ds^i_j\,((ad(a))\,W) = s^i_r\,(a)\;ds^r_k\,(W)\,t^k_j\,(a) \tag{9'}$$

Независно од овој директен доказ, релациите (1) и (1') може да се изведат и на многу пократок начин, на основа на дефиницијата на тангентен вектор и диференцијал на пресликување. Во согласност со претходните ознаки, од очевидните релации

$$(s^i_j \circ L_a)\,b = s^i_j\,(ab) = s^i_k\,(a)s^{\,k}_{\,j}(b)$$

и дефиницијата

$$(dL_a \cdot W) f = W(f \circ L_a) \qquad f \in C^\infty(ab),$$

добиваме за $f = s^i_j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$

$$(dL_a \cdot W) s^i_j = W(s^i_j \circ L_a) = s^i_k(a) \, W s^k_j$$

што директно ја дава релацијата (7′), а со тоа и релацијата (1). На сличен начин од

$$(dR_a \cdot W) s^i_j = W(s^i_j \circ R_a) = s^k_j(a) \, W s^i_k$$

се добива и (1′).

Релации аналогни на (1) и (1′) се добиваат ако наместо тангентен вектор $W \in D^1(b)$ разгледуваме произволно векторско поле $X \in D^1(GL(n; R))$. Се добива имено (за $a, b \in GL(n; R)$)

$$(ds^i_j (dL_a \cdot X))(b) = s^i_k(a) \, ds^k_j (X_{a^{-1}b}), \tag{10}$$

$$(ds^i_j (dR_a \cdot X))(b) = s^k_j(a) \, ds^i_k (X_{ba^{-1}}). \tag{10′}$$

Доказот на (10) и (10′) е сличен на претходните докази.

Како примена на релациите (1) и (1′) ќе биде изведена (во склад со претходните ознаки) познатата формула (2)

$$\mu = t^i_k \, ds^k_j \, E^j_i, \tag{11}$$

израз од голема важност на пример во теоријата на линеарни конексии. Таа може да се разгледува и како важен самостоен резултат за $GL(n; R)$ во склоп на теоријата на Li-групи.

Нека е $a \in GL(n; R)$ и $W \in D^1(a)$ произволен вектор. Имајќи ја предвид вообичаената идентификација на $gl(n; R)$ со $D^1(e)$ (e неутрален елемент на $GL(n; R)$), имаме

$$\mu(W) = dL_{a^{-1}}(W),$$

што според (1) (односно (7)) и својствата на диференцијални 1-форми дава

$$\mu(W) = ds^i_j(W) \, s^k_i(a^{-1}) \, (X^j_k)_e$$

што може да се напише како

$$\mu(W) = t^i_k(a) \, ds^k_j(W) \, E^j_i. \tag{12}$$

Изразот (12) ја докажува формулата (11) односно (2).

L I T E R A T U R A

1. Helgason, S. Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York and London, 1962,
2. Kobayashi, S. and Nomizu, K. Foundations of Differential Geometry, vol. I, Interscience Publishers 1963, New York — London.
3. Nomizu, K. Lie Groups and Differential Geometry, Publ. Math. Soc. Japan, 1956. (MR 18, 821).

Ognjan Jotov

DIFFERENTIALS OF THE GROUP OPERATION OF $GL(n; R)$

(S u m m a r y)

The purpose of this paper is to obtain local coordinate expressions for the differentials of the left and right translation of the general linear group $GL(n; R)$, namely the formulas

$$dL_a \cdot W = ds^i_r(W) s^k_i(a) (X^r_k)_{ab} \tag{1}$$

$$dR_a \cdot W = ds^i_k(W) s^k_m(a) (X^m_i)_{ba}, \tag{1'}$$

where $a, b \in GL(n: R)$, W arbitrary tangent vector on $GL(n; R)$ at b, $s^i_j (1 \leqslant i, j \leqslant n)$ the natural coordinate system of $GL(n; R)$, where the upper ndex means the row, and the lower one the column of the coresponding matrix, and X^i_j the vector field $\partial/\partial s^j_i$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Using (1) and (1′) we obtain the wellknown coordinate expression

$$\mu = t^i_k \, ds^k_j \, E^j_i \tag{2}$$

of the canonical 1-form of $GL(n; R)$, where $(t^i_j) = (s^i_j)^{-1}$ and E^j_i, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, the natural basis of the Lie-algebra $gl(n; R)$ of $GL(n; R)$.

Proof of (1) and (1′). Let $a, b \in GL(n; R)$ and W arbitrary tangent vector on $GL(n: R)$ at b. With the given notation, since

$$(s^i_j \circ L_a) b = s^i_k(a) s^k_j(b),$$

we have

$$ds^i_j(dL_a \cdot W) = W(s^i_j \circ L_a) = s^i_k(a) \, ds^k_j(W) \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

what proves (1). (1′) can be proved in the same way. From (1) and (1′) we obtain the coordinate expression for the differential of the inner automorphism

$$ad(a): b \to aba^{-1} \qquad b \in GL(n; R)$$

which is denoted by ad as well. The result is

$$ds^i_j\,((ad\,(a))\,W) = s^i_r\,(a)\,ds^r_k\,(W)\,t^k_j\,(a)$$

Expressions like (1) and (1′) can be obtained in the case if W is a vector field on $GL(n;\,R)$. With the same notation, for each $b \in GL(n;\,R)$, we obtain

$$(ds^i_j\,(dL_a \cdot W))\,(b) = s^i_k\,(a)\,ds^k_j\,(W a_{-1}\,b),$$

$$(ds^i_j\,(dR_a \cdot W))\,(b) = s^k_j(a))\,ds^i_k\,(W_{ba^{-1}}).$$

Proof of (2). Let $a \in GL(n;\,R)$ and W arbitrary vector on $GL(n;\,R)$ at a. The natural identification of the Lie-algebra of left invariant vector fields on $GL(n;\,R)$ with the tangent space at the identity e allows to write

$$\mu(W) = dL_{a^{-1}}\,(W),$$

which in view of (1) and (1′) can be written as

$$\mu(W) = ds^i_j\,(W)\,s^k_i\,(a^{-1})\,(X^j_k)_e$$

what proves (2).