Год. Збор. Матем. фак.
28 (27—31) 1977

СМЕСТУВАЊЕ НА n-ГРУПОИДИ ВО n-КВАЗИГРУПА

Смиле Марковски

За алгебрата $Q(f)$ со една n-арна операција велиме дека е n-квазигрупа акко[1]) $Q(f)$ ги задоволува законите:

(1) $fx_1 \dots x_{i-1}\, yx_{i+1} \dots x_n = fx_1 \dots x_{i-1}\, zx_{i+1} \dots x_n \Rightarrow y = z,$

(2) $(\exists y)\,(fx_1 \dots x_{i-1}\, yx_{i+1} \dots x_n = x_i),$

за $i = 1, 2, \dots, n$.

За $Q(f)$ велиме дека е n-групоид со кратење акко Q(f) го задоволува законот (1).

Во работата [2] е докажано дека секој n-групоид со кратење може да се смести во n-квазигрупа (дури и во случај кога n е произволен ординален број). Во оваа работа се докажува истото тврдење кога n е природен број, $n > 1$, но начинот на докажување е сосема различен од оној во [2]; притоа, како почетна идеја е земен доказот во [1] на истото тврдење за бинарен случај.

1. Нека $Q(f)$ е n-квазигрупа. Ги определуваме n-операциите $f_1, \dots, f_n$ на Q на следниов начин:

(3) $f_i\, a_1 \dots a_{i-1}\, ba_{i+1} \dots a_n = a_i \Leftrightarrow fa_1 \dots a_n = b$

за $i = 1, 2, \dots, n$.

Точна е следнава особина:

Теорема 1.1. Алгебрата $Q(f)$ е n-квазигурпа акко алгебрата $Q(f, f_1, \dots, f_n)$ ги задоволува законите:

(4) $fx_1 \dots x_{i-1}\, f_i\, x_1 \dots x_n\, x_{i+1} \dots x_n = x_i,$

(5) $f_i\, x_1 \dots x_{i-1}\, fx_1 \dots x_n\, x_{i+1} \dots x_n = x_i,$

(6) $f_i\, x_1 \dots x_{i-1}\, f_j\,(x_1 \dots x_n)^{i,j}\, x_{i+1} \dots x_n = x_j\ (i \neq j),$

за $i, j = 1, 2, \dots, n$. Притоа $(x_1 \dots x_n)^{i,j} = x_1 \dots x_{i-1}\, x_j\, x_{i+1} \dots$
$\dots x_{j-1}\, x_i\, x_{j+1} \dots x_n$. ∎

---

[1]) „акко“ е кратенка за „ако и само ако“.

Поради Т. 1.1 понатаму под n-квазигрупа ќе ја подразбираме алгебрата $Q(f, f_1, \ldots, f_n)$.

Бидејќи n-квазигрупите можат да се дефинираат со помошта на идентитетите (4) — (6), односно класата n-квазигрупи претставува многукратност, за произволно множество Q постои слободна n-квазигрупа $\mathcal{B} = B(f', f_1', \ldots, f_n')$, генерирана од Q. Конструкцијата на слободната n-квазигрупа $\mathcal{B}$, ја изведуваме на следниов начин:

Со G го означуваме множеството од сите F-зборови над Q, каде $F = \{f, f_1, \ldots, f_n\}$. (Притоа, поимот F-збор над Q се дефинира индуктивно, на следниов начин: (i) секој елемент од Q е F-збор над Q; (ii) ако $u_1, \ldots, u_n$ се F-зборови над Q и $g \in F$, тогаш и низата $u = gu_1 \ldots u_n$ е F-збор над Q (за $u, u_1, \ldots, u_n$ велиме дека се подзборови од u); (iii) една низа симболи u над $Q \cup F$ е F-збор над Q акко u е добиена со конечна примена на (i) и (ii).) Потоа, со B го означуваме подмножеството на G што се состои од сите F-зборови над Q во коишто не се јавуват подзборови од облик:

$$fu_1 \ldots u_{i-1} f_i u_1 \ldots u_n u_{i+1} \ldots u_n,$$

$$f_i u_1 \ldots u_{i-1} fu_1 \ldots u_n u_{i+1} \ldots u_n,$$

$$f_i u_1 \ldots u_{i-1} f_j (u_1 \ldots u_n)^{i,j} u_{i+1} \ldots u_n \ (i \neq j),$$

каде $u_1, \ldots, u_n \in B$.

Операциите $f', f_1', \ldots, f_n'$ ги определуваме над B на следниов начин:

Нека $u_1, \ldots, u_n \in B$. Тогаш:

$$f_i u_1 \ldots u_n \in B \Rightarrow f_i' u_1 \ldots u_n = f_i u_1 \ldots u_n \ (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$$u_i = f_i u_1 \ldots u_n \Rightarrow f' u_1 \ldots u_n = u_i \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$u_i = fu_1 \ldots u_n \Rightarrow f_i' u_1 \ldots u_n = u_i \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$i \neq j, \ u_i = f_j (u_1 \ldots u_n)^{i,j} \Rightarrow f_i' u_1 \ldots u_n = u_j \ (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

На тој начин ја добиваме слободната n-квазигрупа $\mathcal{B} = B(f', f_1', \ldots, f_n')$ генерирана од Q. Истакнуваме дека $Q \subseteq B$ и дека елементите на B се еднозначно определени.

2. Ја докажуваме основната теорема во оваа работа:

Теорема 2.1. Секој n-групоид со кратење може да се смести во n-квазигрупа.

Доказот на Т. 2.1 ќе го изведеме како последица од неколку леми, како што следува.

Нека $Q(f)$ е n-групоид со кратење. Со $\mathcal{B} = B(\bar{f}, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n)$ ја означуваме слободната n-квазигрупа генерирана од множеството Q.

Во множеството B дефинираме релација $\vdash$ на следниов начин:

Ако $fa_1 \dots a_n = b$ во $Q(f)$, тогаш

(7) $uf\, a_1 \dots a_n\, v \vdash u\, b v$,

(8) $uf_i\, a_1 \dots a_{i-1}\, ba_{i+1} \dots a_n\, v \vdash u\, a_i\, v\ (i = 1, 2, \dots, n)$,

каде u и v се соодветни низи од симболи во $B \cup F$ такви што, на пример, ubv е F-збор над Q; обратно, ако важи која било од релациите (7) или (8), тогаш $fa_1 \dots a_n = b$ во $Q(f)$.

Релацијата $\vdash$ ја проширувамe до минималната еквивалентност α на B, т.е. α е транзитивниот производ на релациите $\vdash$, $\dashv = \vdash^{-1}$, Δ_B.

Лема 2.2. Релацијата α е конгруенција во B.

Доказ: Нека $u \vdash v$ според (7), т.е. $u = u_1\, \bar{f} a_1 \dots a_n\, v_1$, $v = u_1\, b v_1$, каде $fa_1 \dots a_n = b$ во $Q(f)$, и нека $d_1, \dots, d_{j-1}, d_{j+1}, \dots, d_n \in B$. Можни се следниве случаи:

1°. $d_1 = a_1, \dots, d_{j-1} = a_{j-1}, d_{j+1} = a_{j+1}, \dots, d_n = a_n, u = \bar{f} a_1 \dots \dots a_n, v = b, k = j$. Тогаш

$$\bar{f}_k\, d_1 \dots d_{j-1}\, u\, d_{j+1} \dots d_n = \bar{f}_j\, a_1 \dots a_{j-1}\, \bar{f} a_1 \dots a_n\, a_{j+1} \dots a_n = a_i,$$

$$\bar{f}_k\, d_1 \dots d_{j-1}\, v d_{j+1} \dots d_n = \bar{f}_j\, a_1 \dots a_{j-1}\, b a_{j+1} \dots a_n.$$

Сега, според (8), имаме

(9) $\bar{f}_k\, d_1 \dots d_{j-1}\, v d_{j+1} \dots d_n \vdash \bar{f}_k\, d_1 \dots d_{j-1}\, u d_{j+1} \dots d_n$.

2°. Во секој друг случај, според (7) важи

(10) $\bar{f}_k\, d_1 \dots d_{j-1}\, u d_{j+1} \dots d_n \vdash \bar{f}_k\, d_1 \dots d_{j-1}\, v d_{j+1} \dots d_n$.

Ако пак $u \vdash v$ според (8) на сличен начин како во претходната дискусија заклучуваме дека важи (9) или (10).

Значи, ако $u \alpha v$ и $d_1, \dots, d_{j-1}, d_{j+1}, \dots, d_n \in B$, тогаш $\bar{f}_k\, d_1 \dots \dots d_{j-1}\, u d_{j+1} \dots d_n\, \alpha\, \bar{f}_k\, d_1 \dots d_{j-1}\, v d_{j+1} \dots d_n$, т.е. α е конгруенција во $\mathcal{B}$. ∎

Ставаме $C = B/\alpha$, а $\mathcal{C} = C(\bar{\bar{f}}, \bar{\bar{f}}_1, \dots, \bar{\bar{f}}_n)$ е соодветната фактор-алгебра.

Лема 2.3. (i) Алгебрата $\mathcal{C}$ е n-квазигрупа.

(ii) Пресликувањето $\varphi : Q \to C$, определено со $\varphi(a) = a^\alpha$, е хомоморфизам од $Q(f)$ во $C(\bar{\bar{f}})$. ∎

Со користење на лемите што следуваат ќе покажеме дека пресликувањето φ е инјекција, т.е. φ е мономорфизам од $Q(f)$ во $C(\bar{\bar{f}})$.

Лема 2.4. Ако $u, v \in B$, тогаш $u \vdash v$ е можна само ако должината на низата u, во ознака $|u|$, е поголема од должината на низата v. ■

Нека $\square \in \{\vdash, \dashv, \Delta\}$. За еден елемент $u \in B$ ќе велиме дека е *прост* акко за секој $v \in B$ релацијата $u \square v$ е можна само ако $v \vdash u$ или $v = u$.

Лема 2.5. За секој $u \in B$ или u е прост или постои низа

$$u \vdash u_1 \vdash u_2 \vdash \dots u_k \vdash v$$

каде v е прост елемент. (Во овој случај за v велиме дека е *прост претставник на* u).

Доказ: Ако u не е прост, постои $u_1 \in B$ така што $u \vdash u_1$. Но тогаш, според Л. 2.4, $|u| > |u_1|$. Ако u_1 не е прост, постапката продолжува понатаму. Бидејќи u има конечна должина мора да се стигне до прост претставник. ■

Лема 2.6. Секој елемент $u \in B$ има единствен прост претставник.

Доказ: Нека $u \in B$ и нека постојат $u_1, u_2 \in B$, така што $u \vdash u_1$, $u \vdash u_2$. Бидејќи појавувањето на подзборови од облик $\bar{f_i}\, x_1 \dots x_n$ во низата u е без „преклопување", т.е. не може да се случи некој од симболите x_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ во $\bar{f_i}\, x_1 \dots x_n$ да биде симболот $\bar{f_j}$, релациите $u \vdash u_1$ и $u \vdash u_2$ се можни само во случај кога

$$u = v_1 \bar{f_i}\, a_1 \dots a_n\, v_2 \bar{f_j}\, b_1 \dots b_n\, v_3,$$

$$u_1 = v_1\, c_1\, v_2 \bar{f_j}\, b_1 \dots b_n\, v_3,$$

$$u_2 = v_1 \bar{f}\, a_1 \dots a_n\, v_2\, c_2\, v_3,$$

каде $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, c_2 \in Q$, v_1, v_2, v_3 се низи од симболи на $B \cup F$, а $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$. Во тој случај се точни и релациите $u_1 \vdash v$, $u_2 \vdash v$, каде $v = v_1 c_1 v_2 c_2 v_3$. Но $|u| > |v|$, па користејќи индуктивна претпоставка по должината на зборовите, v има единствен прост претставник, од каде следува дека и u има единствен прост претставник, а тоа, имено е претставникот на v. ■

Лема 2.7. Нека $v \in B$. Тогаш во класата v^{α} постои единствен прост претставник за сите елементи од v^{α}. Притоа тој е со најмала должина меѓу елементите во v^{α}.

Доказ: Според Л. 2.6 во v^{α} мора да се содржи барем еден прост претставник u, бидејќи $v^{\alpha} \neq \varnothing$. Нека w е друг прост претставник во v^{α}. Тогаш, бидејќи $u \alpha w$, постои низа од облик

$$w \dashv w_1 \dashv \dots \dashv w_k \vdash w_{k+1} \square \dots \square w_r \vdash u \quad (\square \in \{\dashv, \vdash, \Delta\})$$

каде што со k е индексиран првиот елемент од низата по којшто знакот $\dashv$ се заменува со знакот $\vdash$. Бидејќи, според Л. 2.6, w_k има единствен прост претставник, заклучуваме дека w е прост претставник и на w_k и на w_{k+1}. Продолжувајќи на ист начин добиваме дека сите елементи $w_1, \ldots, w_r$ имаат исти прости претставници, од каде следува дека $u = w$. Притоа u е со најмала должина меѓу елементите од v^α според дефиницијата на прост елемент. ∎

Лема 2.8. Ако $a, b \in Q$ и $a^\alpha = b^\alpha$, тогаш $a = b$, односно пресликувањето $\varphi : Q \to C$ е инјекција.

Доказ: Ако $a, b \in Q$, тогаш $|a| = |b| = 1$, што значи a и b се прости претставници во a^α. Сега, од Л. 2.7 следува $a = b$. ∎

Од сето досега изложено заклучуваме дека ако $Q(f)$ е даден n-групоид со кратење, тогаш постои n-квазигрупа $\mathcal{C} = C(\overline{\overline{f}}, \overline{\overline{f}}_1, \ldots, \overline{\overline{f}}_n)$ и мономорфизам од $Q(f)$ во $C(f)$; заменувајќи ја $\mathcal{C}$ со погодно избран n-квазигрупа $\mathcal{Q} = D(f, f_1, \ldots f_n)$, таква што $Q \subseteq D$ и $\mathcal{Q}$ е изоморфна со $\mathcal{C}$, ја добиваме и точноста на Теорема 2.1.

ЛИТЕРАТУРА

1] P. M. Cohn: Universal Algebra, New York, 1965.

]2] G. Čupona and S. Markovski: On quasigroups, God. Zbornik PMF, 25—26 (1975—76), str. 10—14.

Smile Markovski

EMBEDDINGS OF *N*-GROUPOIDS IN *N*-QUASIGROUPS

Summary

It is known [2] that every n-groupoid with cancellation can be embedded in an n-quasigroup, where n is an arbitrary ordinal number. We reprove the same result for n finite by a different method, the idea being taken from [1] where it is done for $n=2$.