СМЕСТУВАЊЕ НА ТОПОЛОШКИ АЛГЕБРИ ВО ТОПОЛОШКИ ПОЛУГРУПИ

Ѓ. Чупона

Во оваа работа се покажува дека ако $A(\Omega)$ е тополошка универзална алгебра, тогаш таа може да се смести во тополошка полугрупа, така што да биде точно равенството $\omega x_1 x_2 \ldots x_n = d_\omega x_1 x_2 \ldots x_n$, за секои $x_i \in A$ и операција $\omega \in \Omega$, при што $D = \{d_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ е фамилија фиксни елементи од S.

Прво ќе дадеме неколку претходни дефиниции.

Нека $A(\Omega)$ е универзална алгебра, т. е. Ω е фамилија финитарни операции над множеството A. Ако $\omega \in \Omega$ и ако со ω n-торката $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се пресликува во y, ќе пишуваме:

$$y = \omega x_1 x_2 \ldots x_n. \tag{1}$$

За алгебрата $A(\Omega)$ велиме дека е тополошка ако A е тополошки простор, при што сите операции од Ω се непрекинати. Со други зборови, ако $b = \omega a_1 a_2 \ldots a_n$, и ако U е околина на b, постојат околини $U_1, U_2, \ldots, U_n$ соодветно на $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такви што:

$$\omega U_1 U_2 \ldots U_n \subseteq U. \tag{2}$$

Како што е добро познато, наместо со фамилијата од сите отворени множества, може да се работи со некоја база на отворени множества.

Сега ќе го формулираме основниот резултат на работата [2], којшто ни е потребен за формулирањето, а потоа и докажувањето, на резултатот споменат погоре.

Нека $A(\Omega)$ е универзална алгебра и нека на секоја операција ω со должина $n \geq 1$ ѝ припишеме еден симбол d_ω, при што претпоставуваме дека $\omega \neq \tau \Rightarrow d_\omega \neq d_\tau$, и дека множеството D од сите такви симболи е дисјунктно со A. Потоа, S нека е полугрупата што е генерирана од $A \cup D$, а ги задоволува следните определувачки услови:

$$\omega a_1 a_2 \ldots a_n = a \text{ во } A(\Omega) \Rightarrow d_\omega a_1 a_2 \ldots a_n = a \text{ во } S. \tag{3}$$

За производот $b_1 b_2 \ldots b_k$, каде што $b_i \in A \cup D$, велиме дека е *редуцибилен*, ако постои i таков што $b_i = d_\omega, b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots, b_{i+n} \in A$, при што ω е n-тарна операција од Ω. Во спротивен случај, соодветниот производ се вели дека е *редуциран*. Се покажува дека *секој елемент $s \in S$ може на единствен начин да се претстави како редуциран производ $s = c_1 c_2 \ldots c_m$*, а во тој случај за m велиме дека е *должина на s*. Должина 1, имаат, значи, елементите од $A \cup D$. (Доказот на овој резултат е даден во работата [2].).

За добиената полугрупа S велиме дека е *слободно генерирана од алгебрата* $A(\Omega)$. (Се разбира, оваа полугрупа не е слободна како полугрупа.).

Сега ќе го формулираме, а потоа и докажеме, резултатот што е предмет на работава.

ТЕОРЕМА. *Нека $A(\Omega)$ е тополошка алгебра, а S полугрупата што е слободно генерирана од оваа алгебра. Притоа, претпоставуваме дека $A \neq \emptyset$, а и дека во Ω постои барем една n-тарна операција ω таква што $n \geq 1$.*

Нека $\mathcal{B}$ е фамилијата од сите подмножества B на S од облик $B = B_1 B_2 \ldots B_k$, каде што B_i е отворено во дадениот тополошки простор A, или пак $B_i = \{d\} \subseteq D$. Освен тоа, претпоставуваме дека производот $B_1 B_2 \ldots B_k$ е редуциран, т. е. дека секој производ од облик $b_1 b_2 \ldots b_k$, каде што $b_i \in B_i$, е редуциран.

Тогаш, имаме:

(I) *$\mathcal{B}$ е база на топологија над S.*

(II) *Полугрупата S е тополошка во однос на топологијата индуцирана од $\mathcal{B}$.*

(III) *Дадениот тополошки простор A е и отворен и затворен потпростор од S.*

(*IV*) *Ако алгебрата $A(\Omega)$ е хаусдорфова, тогаш и полугрупата S е хаусдорфова.*

(*V*) *Полугрупата S не е компактна.*

Доказ. (*I*) *Ако $B \in \mathcal{B}$*, тогаш од дефиницијата на $\mathcal{B}$ е јасно дека сите елементи од B имаат иста должина k, за којашто ќе велиме дека е должина на B. Според тоа, ако $B', B'' \in \mathcal{B}$ имаат различни должини, тогаш $B' \cap B'' = \emptyset$. Да претпоставиме сега дека B' и B'' имаат иста должина k и дека $b \in B' \cap B''$. Ако,

$$B' = B_1' B_2' \ldots B_k', \ B'' = B_1'' B_2'' \ldots B_k'', \tag{4}$$

тогаш имаме:

$$b = b_1' b_2' \ldots b_k' = b_1'' b_2'' \ldots b_k'', \tag{5}$$

каде што $b_i' \in B_i'$, $b_i'' \in B_i''$. Ако се има предвид дека и двата производа во (5) се редуцирани, добиваме дека $b_i' = b_i''$, од што следува дека:

$$B = B_1 B_2 \dots B_k \subseteq B' \cap B'',$$

каде што $B_i = B_i' \cap B_i''$. Со тоа покажавме дека:

$$B', B'' \in \mathcal{B} \quad \& \quad b \in B' \cap B'' \Rightarrow (\exists\, B \in \mathcal{B})\ b \in B \subseteq B' \cap B''. \tag{6}$$

Јасно е пак дека фамилијата $\mathcal{B}$ го покрива множеството S, така што од (6) следува дека $\mathcal{B}$ е навистина база на топологија над S.[1]

(II) Сега ќе покажеме дека операцијата на полугрупата S е непрекината во однос на топологијата индуцирана од $\mathcal{B}$. За таа цел, ќе претпоставиме дека:

$$s' = b_1' b_2' \dots b_k',\ s'' = b_1'' b_2'' \dots b_p'' \in S, \tag{7}$$

при што $b_i', b_j'' \in AUD$, а соодветните производи се редуцирани. Нека $s = s' s''$ и нека $B = B_1 B_2 \dots B_q$ е базна околина на s. Ако производот

$$s = b_1' b_2' \dots b_k' b_1'' b_2'' \dots b_p'' \tag{8}$$

е редуциран, тогаш според изнесеното во доказот на (I), имаме $k+p=q$, а освен тоа $b_i' \in B_i'$, $b_j'' \in B_{j+k}$. Според тоа, $B' = B_1 B_2 \dots B_k$ е базна околина на s', а $B'' = B_{k+1} \dots B_q$ на s'', при што $B' B'' = B$.

Преостанува да го разгледаме случајот кога производот од десната страна на (8) е редуцибилен. Во тој случај постои $r \leqslant k$, таков што $b_r' = d\omega \in D$, $b'_{r+1}, \dots, b_k', b_1'', \dots, b''_{n-k+r} \in A$, каде што ω е n-тарна операција. Тогаш, ако:

$$a = \omega\, b'_{r+1} \dots b_k' b_1'' \dots b''_{n-k+r} \text{ во } A\,(\Omega), \tag{9}$$

ќе имаме:

$$s = b_1' b_2' \dots b'_{r-1}\ a\ b''_{n-k+r+1} \dots b_p'' \text{ во } S. \tag{10}$$

Да ставиме

$$s_1 = b_1' b_2' \dots b'_{r-1},\ s_2 = ab''_{n-k+r+1} \dots b_p''. \tag{11}$$

Имајќи предвид дека десната страна на (10) има помалку фактори од десната страна на (8), можеме да претпоставиме дека постојат базни околини C_1 на s_1, а C_2 на s_2, такви што:

$$C_1 C_2 \subseteq B, \tag{12}$$

[1]) Да се види, на пример, [1] стр. 47.

каде што B е дадената базна околина на s. Производите од десните страни на (11) се редуцирани (бидејќи такви се соодветните производи од (7)), од што следува дека:

$$C_1 = B_1' \, B_2' \dots B'_{r-1}, \; C_2 = C \, B''_{n-k+r+1} \dots B_p'', \tag{13}$$

каде што B_i' е околина на b_i', B_j'' на b_j'', а C на a. (Притоа, ако е, на пример, $b_2' \in D$, тогаш $B_2' = \{b_2\}$.) Поради непрекинатоста на операцијата ω, од (9) следува дека постојат околини $B'_{r+1}, \dots, B_k', B_1'', \dots, B''_{n-k+r}$, соодветно на $b'_{r+1}, \dots, b_k', b_1'', \dots, b''_{n-k+r}$ во A, такви што

$$\omega \, B'_{r+1} \dots B_k' \; B_1'' \dots B''_{n-k+r} \subseteq C, \tag{14}$$

т. е.

$$d_\omega \, B'_{r+1} \dots B_k' \; B_1'' \dots B''_{n-k+r} \subseteq C. \tag{14'}$$

Ако ставиме

$$B' = B_1' \dots B'_{r-1} \; B_r' \dots B_k', \; B'' = B_1'' \dots B_p'', \tag{15}$$

каде што $B_r' = \{b_r'\} = \{d_\omega\}$, според (12), (13) и (14'), добиваме

$$B' \, B'' \subseteq B. \tag{12'}$$

Од тоа што производите на десните страни од (7) се редуцирани, следува дека се редуцирани и производите од десните страни на (15), па значи B' е базна околина на s', а B'' е базна околина на s''.

Со спроведената дискусија покажавме дека полугрупата S е тополошка во однос на топологијата индуцирана со базата $\mathcal{B}$.

(*III*) Јасно е дека секое отворено множество во просторот A (па значи и самото множество A) припаѓа на $\mathcal{B}$, т. е. е отворено и во S. Имајќи го тоа предвид, како и тоа што $A \cap D = \emptyset$, заклучуваме дека дадениот простор A е навистина отворен потпростор од S.

Сега да покажеме дека A е и затворено подмножество од S. За таа цел нека земеме b да е произволен елемент од $S \setminus A$. Ако b има должина 1, тогаш $b \in D$, па $\{b\}$ е базна околина на b која е дисјунктна со A. Ако пак должината на b е поголема од 1, тогаш секоја базна околина на b е дисјунктна со A. Од ова следува дека A е затворено подмножество од S.

(Да забележиме дека и D е затворено и отворено подмножество на S, и дека, како потпростор од S, D е дискретен простор.).

(*IV*) Да претпоставиме сега дека дадениот простор A е хаусдорфов. Ќе покажеме дека и S е хаусдорфов. Навистина, ако b и c се два елемента од S

со различни должини, тогаш било кои две нивни базни околини се дисјунктни. Ако пак b и c имаат иста должина, но $b \neq c$, тогаш во нивните редуцирани производи:

$$b = b_1 b_2 \ldots b_k, \; c = c_1 c_2 \ldots c_k$$

имаме $b_i \neq c_i$, барем за еден број i. Ако $b_i, c_i \in A$, тогаш (поради претпоставката дека A е хаусдорфов простор) постојат базни околини B_i на b_i и C_i на c_i, такви што $B_i \cap C_i = \varnothing$. Во случај пак да биде $b_i \in A$, $c_i \in D$, или b_i, $c_i \in D$, јасно е дека било кои две базни околини на b_i и c_i се дисјунктни. Ако земеме сега B_j да е произволна базна околина на b_j, а C_j базна околина на c_j, каде што $j \neq i$, и ако B_i и C_i ги избереме така што $B_i \cap C_i = \varnothing$, тогаш $B = B_1 B_2 \ldots B_k$ ќе е базна околина на b, а $C = C_1 C_2 \ldots C_k$ на c, и притоа $B \cap C = \varnothing$.

Со тоа покажавме дека просторот S е хаусдорфов.

(V) Нека S_k е множеството на сите елементи од S што имаат должина k. Јасно е дека S_k е отворено множество и дека S_k и S_p се дисјунктни за $p \neq k$. Освен тоа, од направените претпоставки за алгебрата $A(\Omega)$ следува дека $D \neq \varnothing$, па ако $d \in D$, имаме $d^k \in S_k$, а тоа повлекува дека $S_k \neq \varnothing$ за секој природен број k. Од ова одма заклучуваме дека просторот S не е компактен, бидејќи $\{S_k \mid k \in N\}$ е отворена покривка на S од која што не може да се извлече конечна потпокривка.

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Kelley, General Topology, New York 1957.

[2] Ѓ. Чупона, За теоремата на Кон-Ребане, Год. Зборн. Прир. Матем. фак. Скопје 20 (1970) 5—14.

Ġ. Čupona

IMBEDDINGS OF TOPOLOGICAL ALGEBRAS INTO TOPOLOGICAL SEMIGROUPS

Summary

The following result is proved in this note.

Let $A(\Omega)$ be a topological universal algebra, such that $A \neq \varnothing$ and $\Omega \setminus \Omega_0 \neq \varnothing$, where Ω_0 is the set of 0-ary operators belonging to Ω.

(I) Let $\omega \to d_\omega$ be a bijection from $\Omega \setminus \Omega_0$ onto a set D, where $A \cap D = \varnothing$, and let S be the semigroup generated by AUD, such that

$$\omega\, a_1 a_2 \ldots a_n = a \text{ in } A(\Omega) \Rightarrow d_\omega\, a_1 a_2 \ldots a_n = a \text{ in } S. \tag{1}$$

Jf $s \in S$, then the minimal positive integer m such that

$$s = b_1\, b_2 \,\cdots\, b_m, \tag{2}$$

where $b_i \in AUD$, is said to be the *length* of s, and then the right side of (2) is said to be a *reduced product*.

Each element $s \in S$ can be in a unique way represented as a reduced product. Therefore, two *different elements* $b,\ c \in AUD$ are also *different* in S, and thus $AUD \subseteq S$. ([2]).

(II) *Let $\mathcal{B}$ be the collection of the subsets B of S which are products*

$$B = B_1\, B_2 \cdots B_k, \tag{3}$$

where B_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ is an open subset of A, or $B_i = \{d\}$, $d \in D$. It is also assumed that the right side of (3) is a reduced product, and then every product $b_1\, b_2 \cdots b_k$, where $b_i \in B$, is also reduced.

Then we have:

(*i*) *$\mathcal{B}$ is a base of a topology on S.*

(*ii*) *The semigroup S is a topological semigroup with respect to the topology generated by $\mathcal{B}$.*

(*iii*) *The given topological space A is an open and closed subspace of S.*

(*iv*) *If $A(\Omega)$ is a Hausdorff algebra then S is a Hausdorff semigroup, too.*

(*v*) *The semigroup S in not compact.*