Ѓ. *Чупона*

ЗА АЛГЕБРИТЕ НА СМЕСТУВАЊА

Познати се повеќе видови операции меѓу финитарните операции, како и дадени соодветни нивни апстрактни карактеристики. (Да се видат, на пример, работите [2] и [3]). Во работата [5], Белоусов ги изучува операциите „$\overset{i}{+}$" меѓу финитарните операции, кои што од авторот на оваа работа се дефинирани во [1]. Во [5], имено, се издвојуваат четири особини на овие операции (А. 1, А. 2, А. 3, и А. 4) и разгледува класата универзални алгебри што ги имаат тие 4 особини. Специјално внимание им е посветено на алгебрите квазигрупи и добиени неколку општи резултати, кои што овозможуваат да се реши еден сравнително општ вид функционални равенки.

Оваа работа, авторот ја смета како извесно надополнување на работата [5]. Имено, овде се изучува класата универзални алгебри што ги заодволуваат особините А. 1, А. 2, и А. 3 од [5] (овде тоа се 1.1, 1.2, и 1.3). Во првиот дел на работава се изнесуваат неопходните претходни дефиниции, а потоа во вториот дел се формулира и докажува основниот резултат дека секоја алгебра на сместување (т.е. структура со особините 1.1, 1.2 и 1.3) е подалгебра од некоја конкретна алгебра на операции, т.е. од фамилијата $\Omega(A)$ финитарни операции над дадено множество A, при што операциите „$\overset{i}{+}$" се определуваат со (6).

1. Алгебри на сместувања. Нека $\{\Lambda_n \,|n=-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ е дисјунктна фамилија множества и нека

$$\Lambda = \bigcup_{-1}^{\infty} \Lambda_n.$$

Ако $f \in \Lambda_n$, тогаш ќе пишуваме $|f| = n$. Освен тоа, нека $\{\overset{i}{+},\ i=0, 1, 2, \ldots\}$ е фамилија бинарни делумно дефинирани операции во Λ со следните особини:

1.1. Ако $f, g \in \Lambda$, а i е ненегативен цел број таков што $i \leqslant |f|$, тогаш $h=f\overset{i}{+}g$ е еднозначно определен елемент од Λ. (За $i > |f|$, $f \overset{i}{+} g$ нема смисла.) Притоа:

$$|f \overset{i}{+} g| = |f| + |g| \tag{1}$$

1.2. Ако $f, g, h \in \Lambda$ и ако $i \leqslant |f|$, $j \leqslant |g|$, тогаш:

$$f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} h) = (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} h \tag{2}$$

1.3. Ако $f, g, h \in \Lambda$, $|h| = p$, $j < i \leqslant |f|$, тогаш:

$$(f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} h = (f \overset{j}{+} h) \overset{i+p}{+} g. \tag{3}$$

Ако е сето тоа исполнето велиме дека $\Lambda(\overset{i}{+}; i=0, 1, 2, \ldots)$ е алгебра на сместувања. (За пократко изразување, во понатамошното излагање, обично, ќе велиме само „алгебра".)

Нека $f_0, f_1, \ldots, f_k$ се $k+1$ елементи од алгебрата Λ и нека $i_0, i_1, \ldots, i_k$ е низа ненегативни цели броеви, такви што

$$i_{\nu+1} \leqslant |f_0| + |f_1| + \cdots + |f_\nu| \tag{4}$$

Тогаш, збирот

$$f_0 \overset{i_1}{+} f_1 \overset{i_2}{+} \cdots \overset{i_k}{+} f_k$$

се определува со:

$$f_0 \overset{i_1}{+} f_1 \overset{i_2}{+} \cdots \overset{i_k}{+} f_k = ((\ldots (f_0 \overset{i_1}{+} f_1) \overset{i_2}{+} f_2) \ldots)) \overset{i_k}{+} f_k. \tag{5}$$

Пример 1. Нека A е непразно множество, и нека $\Omega(A)$ е множеството од сите $n+1$-тарни операции во A, при што $\Omega_{-1}(A) = A$. Ако $f \in \Omega_m(A)$, $g \in \Omega_n(A)$ и ако $i \leqslant m$, тогаш $f \overset{i}{+} g$ го определуваме со:

$$f \overset{i}{+} g\,(x_0, x_1, \ldots, x_{m+n}) = f(x_0, \ldots, x_{i-1}, g(x_i, \ldots, x_{i+n}), \ldots x_{m+n}). \tag{6}$$

Лесно се проверува ([1] стр. 11, [5] стр. 12) дека се исполнети условите 1.1, 1.2. и 1.3, т.е. дека $\Omega(A)$ е алгебра на сместувања, каде што:

$$\Omega(A) = \bigcup_{-1}^{\infty} \Omega_n(A).$$

Забелешка. Со цел равенствата (1), (2) и (3) да имаат попрост облик овде сме извршиле две модификации кај ознаките во однос на [1] и]5]. Имено, овде Λ_n се пишува наместо Λ_{n+1} во [1] и [5], а исто така $\overset{i}{+}$, наместо $\overset{i+1}{+}$. Јасно е дека овие измени имаат само технички карактер. Во однос на работата [5] е направена измена и во тоа што е изоставена следната аксиома:

$$(\exists\, e \in \Lambda_0)\,(\forall f \in \Lambda)\; 0 \leqslant |f|,\; i \leqslant |f| \Rightarrow f \overset{i}{+} e = f,$$

т.е. барањето за егзистенција на десен неутрален елемент.

И покрај тоа што поимите за хомоморфизам (мономорфизам епиморфизам, изоморфизам), конгруенција, фактор алгебра, подалгебра, се дефинираат на вообичаениот начин, со цел излагањето да биде попотполно, ќе ги дадеме експлицитно тие дефиниции.

1.4. Нека Λ и Λ' се две алгебри. За пресликувањето $\varphi\colon A \to \Lambda'$ велиме дека е хомоморфизам, ако:

$$(\forall f \in \Lambda) |\varphi(f)| = |f|, \qquad (7)$$

$$(\forall f,\ g \in \Lambda,\ i \leqslant |f|),\ \varphi(f \overset{i}{+} g) = \varphi(f) \overset{i}{+} \varphi(g)$$

Ако φ, како пресликување е и: инјекција, сурјекција, биекција, тогаш велиме дека φ е соодветно: мономорфизам, епиморфизам, изоморфизам.

1.5. За еививаленстноста α во алгебрата Λ велиме дека е конгруенција ако:

$$f_1 \alpha f_2 \Rightarrow |f_1| = |f_2|, \qquad (8)$$

$$f_1 \alpha g_1 \,\&\, f_2 \alpha g_2 \Rightarrow (\forall i \leqslant |f_1| = |g_1|) f_1 \overset{i}{+} f_2 \ \alpha\ g_1 \overset{i}{+} g_2.$$

1.6. Нека α е конгруенција во алгебрата Λ и нека за секој $f \in \Lambda$ со f^α ја означиме класата на α во која се содржи f. Тогаш $|f^\alpha|$ и $f^\alpha \overset{i}{+} g^\alpha$ се определуваат со:

$$|f^\alpha| = |f|,\ f^\alpha \overset{i}{+} g^\alpha = (f \overset{i}{+} g)^\alpha \qquad (9)$$

1.7. За подмножеството Ω од алгебрата Λ велиме дека е подалгебра ако е исполнет условот:

$$f,\ g \in \Omega \,\&\, i \leqslant |f| \Rightarrow f \overset{i}{+} g \in \Omega. \qquad (10)$$

Лесно се проверува точноста на следните особини.

1.8. Ако α е конгруенција во алгебрата на сметувања Λ тогаш и Λ/α е алгебра на сместувања во однос на операциите дефинирани во (9). Притоа, природното пресликување:

$$\psi\colon f \to f^\alpha \qquad (11)$$

е епиморфизам.

1.9. Ако $\varphi\colon \Lambda \to \Lambda'$ е хомоморфизам, тогаш јадрото $\alpha = ker\ \varphi$ на φ е конгруенција во Λ и притоа постои, еднозначно определен мономорфизам $\varphi^*\colon \Lambda/\alpha \to \Lambda'$ така што

$$\varphi = \varphi^* \psi \qquad (12)$$

каде што $\psi\colon \Lambda \to \Lambda/\alpha$ е природниот епиморфизам.

Важат и другите теореми за изоморфизам, кои што овде нема да ги формулираме. (Да се види, на пример [4] стр. 61).

1.10. Класата од сите алгебри на сместувања е категорија, пришто морфизми се хомоморфизмите.

Од оваа особина следува дека сите поими што се осмислени кај произволна категорија се осмислени и кај класата алгебри на операции. Тоа се, на пример, поимите за слободни алгебри, слободни и директни производи.

2. Претставување на алгебрите од сместувања како алгебри на операции. За една алгебра на сместувања Λ велиме дека е конкретна алгебра ако е подалгебра од некоја алгебра $\Omega(A)$ определена како и во примерот **1.** Ќе ја докажеме следната

Теорема. Секоја алгебра на сместувања е конкретна.

Доказ. Доказот ќе го изнесеме во неколку етапи.

(i) Нека Λ е дадена алгебра и a симбол што не припаѓа на Λ; ќе ставиме $|a| = -1$. Го формираме множеството Σ од сите низи:

$$(f_0, f_1, \ldots, f_k;\ i_1, i_2, \ldots, i_k) = (f_0^k;\ i_1^k)^{1)} \tag{13}$$

каде што $f_\nu \in \Lambda \cup \{a\}$, а i_ν се ненегативни цели броеви такви што:

$$i_\nu \leqslant i_{\nu+1} \leqslant |f_0| + \cdots + |f_\nu|. \tag{14}$$

За $k=0$, (13) има облик (f_0). Во Σ определуваме „норма" со:

$$|(f_0^k, i_1^k)| = |f_0| + |f_1| + \cdots + |f_k|. \tag{15}$$

Ако:

$$i \leqslant |(f_0^k; i_1^k)|,\ i_s \leqslant i < i_{s+1},\ j_{s+\lambda} = i_{s+\lambda} + |f|, \tag{16}$$

тогаш ставаме:

$$(f_0^k; i_1^k) \overset{i}{+} (f) = (f_0^s, f, f_{s+1}^k;\ i_1^s, i, j_{s+1}^k), \tag{17}$$

при што за $s=0$ десната страна на (17) има облик $(f_0, f, f_1^k;\ i, j_1^k)$ а $(f_0^k, f;\ i_1^k, i)$ за $i_k < i$.

Поопшто, ако $i \leqslant |(f_0^k; i_1^k)|$, тогаш:

$$(f_0^k;\ i_1^k) \overset{i}{+} (g_0^{r+1};\ j_1^{r+1}) = [(f_0^k;\ i_1^k) \overset{i}{+} (g_0^r; j_1^r)] \overset{i+j_{r+1}}{+} (g_{r+1}) \tag{18}$$

Со обична индукција, се покажува дека $\Sigma(\overset{i}{+} \mid i=0, 1, 2, \ldots)$ ги задоволува условите 1.1, 1.2. и 1.3, т.е. дека таа е алгебра на сместувања.

---

1) $x_n^m \equiv x_n x_{n+1} \cdots x_m,\ m \geqslant n;\ x_{n+1}^n = \varnothing$.

Уочуваме исто така дека:

$$(f_0^k\,;\ i_1^k) = (f_0) \overset{i_1}{+} (f_1) \overset{i_2}{+} \cdots \overset{i_k}{+} (f_k). \tag{18'}$$

За натаму елементите на Σ ќе ги означуваме и со: $f, g, h, \ldots$.

(*ii*) Во Σ ја определуваме релацијата α со:

$$\begin{gathered} f,\ g \in \Sigma \Rightarrow \{ f \alpha g \Leftrightarrow (\exists f_0, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_k,\ g_1\ g_2 \in \Lambda \cup \{a\}) \\ f = (f_0) \overset{i_1}{+} \cdots \overset{i_n}{+} (f_n) \overset{i_{n+1}}{+} \cdots \overset{i_k}{+} (f_k) \\ g = (f_0) \overset{i_1}{+} \cdots \overset{i_n}{+} (g_1,\ g_2;\, i) \overset{i_{n+1}}{+} \cdots \overset{i_k}{+} (f_k)\}, \end{gathered} \tag{19}$$

каде што $f_n = g_1 \overset{i}{+} g_2$ во Λ

Од (19), ако се имаат предвид (15), (17) и (18), е јасно дека:

$$f \alpha g \Rightarrow |f| = |g|, \tag{20}$$

а исто така и дека:

$$f \alpha g,\ h \in \Sigma,\ r \leqslant |f|,\ s \leqslant |h| \Rightarrow f \overset{r}{+} h \alpha g \overset{r}{+} h,\ h \overset{s}{+} f \alpha h \overset{s}{+} g, \tag{21}$$

т.е. дека релацијата α е во согласност со операциите „$\overset{i}{+}$“.

Нека β е симетричното проширување на α, а γ минималната еквивалентност во која се содржи α, т.е.

$$\begin{gathered} \beta = \alpha \cup \alpha^{-1} \\ f \gamma g \Leftrightarrow \{ f = g \vee (\exists h_1, \ldots, h_m \in \Sigma) f \beta h_1 \beta \ldots \beta h_m \beta g. \end{gathered} \tag{22}$$

Од (20) и (21) следува дека γ е конгруенција во Σ. Со Φ ја озна чуваме факторалгебрата Σ/γ. Ако $f \in \Sigma$, тогаш со f^γ ја означуваме класата на еквивалентноста γ во која се содржи f.

(*iii*) Ќе покажеме сега дека можеме алгебрата Λ да ја сметаме за подалгебра од Φ. Пред се, пресликувањето:

$$\varphi : f \rightarrow (f)^\gamma \tag{23}$$

е хомоморфизам, бидејќи $|(f)^\gamma| = |(f)| = |f|$, и ако $f = g \overset{i}{+} h$ во Λ, тогаш $(g,\ h;\ i)^\gamma = (g)^\gamma \overset{i}{+} (h)^\gamma$ во Φ.

Ни преостанува да покажеме дека φ е мономорфизам, т.е. дека како пресликување е инјекција.

Прво, ако $f \in \Lambda$, тогаш

$$(f)\,\alpha\, g \Leftrightarrow g = (f_0,\, f_1;\, i),\; f = f_0 \overset{i}{+} f_1 \text{ во } \Lambda.$$

Со индукција добиваме дека:

$$\begin{gathered}[(\exists\, g_1, \ldots, g_{k-1})\,(f)\,\alpha\, g_1\,\alpha\, g_2\,\alpha \ldots \alpha\, g_{k-1}\,\alpha\, h] \Leftrightarrow \\ h = (f_0^k;\; i_1^k),\; f = f_0 \overset{i_1}{+} f_1 + \cdots \overset{i_k}{+} f_k \text{ во } \Lambda.\end{gathered} \tag{24}$$

Да претпоставиме сега дека е точно (24) и дека $g\alpha h$. Според тоа, имаме

$$\begin{gathered} g = (g_0) \overset{j_1}{+} (g_1) + \cdots \overset{j_n}{+} (g_n) + \cdots \overset{j_{k-1}}{+} (g_{k-1}) = (g_0^{k-1};\; j_1^{k-1}) \\ h = (g_0) \overset{j_1}{+} (g_1) + \cdots \overset{j_n}{+} ((h_1) \overset{i}{+} (h_2)) + \cdots \overset{j_{k-1}}{+} (g_{k-1}) = (f_0^k;\; i_1^k) \\ g_n = h_1 \overset{i}{+} h_2 \text{ во } \Lambda. \end{gathered} \tag{25}$$

Од (24) и (25) добиваме:

$$\begin{gathered} g_0 \overset{j_1}{+} g_1 \overset{j_2}{+} \cdots \overset{j_n}{+} g_n + \cdots \overset{j_{k-1}}{+} g_{k-1} = \\ g_0 \overset{j_1}{+} g_1 \overset{j_2}{+} \cdots \overset{j_n}{+} (h_1 \overset{i}{+} h_2) + \cdots + g_{k-1} = f. \end{gathered} \tag{26}$$

Од сето тоа следува дека

$$f \in \Lambda \;\&\; (f)\,\gamma\, h \Leftrightarrow h = (h_0^s,\, k_0^s),\; f = h_0 \overset{i_1}{+} \cdots \overset{i_2}{+} h_s \text{ во } \Lambda, \tag{27}$$

а од тоа пак добиваме:

$$f,\, g \in \Lambda \;\&\; (f)\,\gamma\,(g) \Rightarrow f = g. \tag{28}$$

т.е. дека φ е навистина мономорфизам.

Од докажаното следува дека, ако секој елемент $f \in \Lambda$ го идентификуваме со $(f)^\gamma \in \Phi$, а исто така и a со $(a)^\gamma$, можеме да сметаме дека $\Lambda \cup \{a\}$ е подмножество од Φ, а и уште повеќе дека $\Lambda \cup \{a\}$ е генераторно множество на Φ, при што Λ е подалгебра од Φ. Според тоа, можеме да пишуваме:,

$$(f_0^k;\; i_1^k) = f_0 \overset{i_1}{+} f_1 \overset{i_2}{+} \cdots \overset{i_k}{+} f_k. \tag{29}$$

(*iii*) Нека со A го означиме множеството Φ_{-1}, т.е. $b \in A \Leftrightarrow b \in \Phi \;\&\; |b| = -1$, Според тоа, $\Lambda_{-1} \cup \{a\} \subset A$. Нека $f \in \Phi$, $|f| = n$ и $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$. Тогаш:

$$|f \overset{0}{+} a_0 \overset{0}{+} a_1 + \cdots \overset{0}{+} a_n| = n - 1 - 1 \cdots - 1 = -1,$$

па значи $b = f \overset{0}{+} a_0 \overset{0}{+} a_1 \overset{0}{+} \cdots \overset{0}{+} a_n \in A$. Ако ставиме:

$$\tilde{f}(a_0, a_1, \ldots, a_n) = b \tag{30}$$

добиваме дека $\tilde{f}$ е $n+1$ — тарна операција во A, т.е. $\tilde{f} \in \Omega_n(A)$.

Лесно се проверува дека пресликувањето

$$\psi\colon f \to \tilde{f} \tag{31}$$

е хомоморфизам од Φ во $\Omega(A)$. (Проверката се спроведува директно, а исто може да се добие и како специјален случај на еден резултат од [5], стр. 18, 20).

Да претпоставиме дека $f, g \in \Lambda$ и $\tilde{f} = \tilde{g}$. Тогаш, имаме, на пример:

$$f \overset{0}{+} \underbrace{a \overset{0}{+} a \overset{0}{+} \cdots \overset{0}{+} a}_{n+1} = g \overset{0}{+} \underbrace{a \overset{0}{+} a \overset{0}{+} \cdot\cdot, \overset{0}{+} a}_{n+1},$$

т. е.

$$(f, a, \ldots, a; o, o, \ldots, o)\ \gamma\ (g, a, \ldots, a; o, \ldots, o). \tag{32}$$

во Σ. Повторувајќи ја дискусијата извршена при докажувањето на (28), се добива дека од (31) следува $f = g$. Според тоа, рестрикцијата $\psi|\Lambda$ од ψ на Λ е мономорфизам, па значи можеме да сметаме дека Λ е подалгебра од $\Omega(A)$.

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

Забелешка. И покрај тоа што, при доказот на теоремата на множеството константи му додадовме само еден елемент a, при формирањето на алгебрата Σ, множеството константи се проширува далеку повеќе, бидејќи, на пример, за секој $f \in \Lambda$, $|f| \geq 0$, $f \overset{0}{+} \underbrace{a \overset{0}{+} a \overset{0}{+} \cdots \overset{0}{+} a}_{n+1}$ е нова константа. Затоа е природно да се постави прашањето дали ова проширување е неопходно, т.е дали пресликувањето $f \to \tilde{f}$ определено в (31), не е секогаш (кога $\Lambda_{-1} \neq \emptyset$) мономорфизам. Дека одговорот е негативен се гледа од следниот едноставен.

Пример 2. Нека B е множество со повеќе од еден елемент, и нека ја разгледаме алгебрата $\Omega(B)$. Ако $a \in B$, да го означиме со Λ множеството на сите операции $f \in \Omega(B)$, такви што

$$f(a\,a \ldots a) = a, \tag{33}$$

при што земаме да биде и a елемент од Λ. Јасно е дека Λ е алгебра на сместувања и дека ако $|f| = |g|$, тогаш $\tilde{f} = \tilde{g}$, па значи во овој случај пресликувањето $f \to \tilde{f}$ не е мономорфизам.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ѓ. Чупона, За финитарните операции, Год. Зборн. Прир. матем. факултет, Скопје 12 (1959). 7—49.

[2] H. I. Whitlock, A Composition Algebra for Multiplace Functions, Math. Annalen 157 (1964) 167—177.

[3] B. Schweizer and A. Sklar, The Algebra of Multiplace Vector —Valued Functions, Bull. Amer. Math. Soc. (1967) 510—515.

[4] P. M. Cohn, Universal Algebra, New York 1965.

[5] V. D. Belousov, Balanced Identities in algebras of quasigroups, University of Waterloo, 1969

Ǵ. Čupona

ON INSERTION ALGEBRAS

(SUMMARY)

The class of *insertion algebras* is defined in [5] as a generalization of a class of algebras of finitary operations which are considered in [1]. The purpose of this note is to show that every insertion algebra can be embedded as a subalgebra in an algebra of operations.

1. Insertion algebras. Let Λ be a nonempty set and $f \to |f|$ a mapping from Λ into the set $N^- = N \cup \{-1\}$, where N is the set of non-negative integers, and $\{\overset{i}{+} \mid i \in N\}$ a collection of partial binary operation on Λ. The (partial) algebra $\Lambda(\overset{i}{+} \mid i \in N)$ is said to be an *insertion algebra* if the following propositions are satisfied.

A. 1. If $f, g \in \Lambda$, $i \in N$, then $f \overset{i}{+} g$ is uniquelly defined element of Λ, if, and only if, $i \leqslant |f|$, and then:

$$|f \overset{i}{+} g| = |f| + |g|. \tag{1}$$

A. 2. If $f, g, h \in \Lambda$, $i \leqslant |f|$, $j \leqslant |g|$, then

$$f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} h) = (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} h. \tag{2}$$

A. 3. If $f, g, h \in \Lambda$, $j < i \leqslant |f|$, $p = |h|$, then

$$(f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} h = (f \overset{j}{+} h) \overset{i+p}{+} g. \tag{3}$$

Let Λ be an insertion algebra and

$$f \in \Lambda_n \Leftrightarrow |f| = n. \tag{4}$$

Then, $\{\Lambda_n | n \in N^-\}$ is a disjoint collection of sets (some of which may be empty) and

$$\Lambda = \bigcup_{-1}^{\infty} \Lambda_n . \tag{5}$$

The elements of Λ_{-1}, are said to be constants.

Example. Let A be a nonempty set, and $\Omega(A)$ the set of the finitary operations on A, including the elements of A. If $f \in \Omega(A)$ is $n+1$ -ary, then we put $|f| = n$; therefore $|f| = -1 \Leftrightarrow f \in A$. If $|f| = m$, $|g| = n$, then an $m+n+1$ — ary operation $h = f \overset{i}{+} g$ is defined by:

$$h\,(x_0^{m+n}) = f(_0^{i-1}\, g\,(x_i^{i+n})\, x_{i+n+1}^{m+n})^{1)}. \tag{6}$$

It can be easily shown that $\Omega(A)$ $(\overset{i}{+} \mid i \in N)$ is an insertion algebra. ([1] p. 11, or [5] p. 12.).

Remark. Here we have made some modifications in the definition of the class of insertion algebras, with respect to [5], but they are of only technical character.

The notions of subalgebras, homomorphisms (monomorphisms, epimorphisms, isomorphisms), congruences and factoralgebras are defined in the usual manner, and these definitions will be not stated here explicitly.

2. Algebras of operations. An insertion algebra Λ is said to be an *algebra of operations* if there is a set A such that Λ is a subalgebra of the insertion algebra $\Omega\,(A)$ of the finitary operations on A.

THEOREM. *Every insertion algebra is an algebra of operations.*

Proof. (i) Let Λ be an insertion algebra, and a an object such that $a \notin \Lambda$. Put $\Lambda^a = \Lambda \cup \{a\}$, and define a norm of a, by $|a| = -1$. Let Σ be the set of the all sequences:

$$f = (f_0^k;\ i_1^k), \tag{7}$$

where

$$f_\nu \in \Lambda^a,\ i_\nu \in N, \text{ and } i_\nu \leqslant i_{\nu+1} \leqslant |f_0| + \cdots + |f_\nu| . \tag{8}$$

A collection of partial binary operations $\{\overset{i}{+} \mid i \in N\}$ is defined in Σ by:

$$(f_0^k;\ i_0^k) \overset{i}{+} (f) = (f_0^s,\ f,\ f_{s+1}^k;\ i_1^s,\ i\ j_{s+1}^k), \tag{9}$$

where:

$$i \leqslant |f_0| + \cdots + |f_k|,\ i_s \leqslant i < i_{s+1},\ j_{s+\lambda} = i_{s+\lambda} + |f|. \tag{10}$$

---

1) $x_r^s = x_r, x_{r+1}, \ldots, x_s$ if $r < s$; $x_{r+1}^r = \emptyset$

By induction:

$$f \overset{i}{+} (g_0^{r+1};\ j_1^{r+1}) = [f \overset{i}{+} (g_0^r;\ j_1^r)] \overset{i+j_{r+1}}{+} (g_{r+1}). \tag{11}$$

By a straight forward computation it can be shown that the constructed (partial) algebra $\Sigma\,(\overset{i}{+} \mid i \in N)$ is an insertion algebra, where the „norm" is defined by

$$|(f_0^k;\ i_1^k)| = |f_0| + \cdots + |f_k|. \tag{12}$$

(ii) Let γ be the minimal congruence in the insertion algebra Σ such that

$$f \overset{i}{+} g = h \text{ in } \Lambda \Rightarrow (f,\ g;\ i)\ \gamma\ (h) \text{ in } \Sigma. \tag{13}$$

This congruence separates the elements of Λ^a, i. e.

$$f,\ g \in \Lambda^a \ \&\ (f)\ \gamma\ (g) \Rightarrow f = g, \tag{14}$$

and therefore the mapping

$$f \to (f)^\gamma \tag{15}$$

is a monomorphism from Λ into $\Phi = \Sigma/\gamma$. Thus we may assume that Λ is a subalgebra of Φ and that $\Lambda^a \subseteq \Phi_{-1}$.

(iii) If $f \in \Lambda_n,\ b_0,\ b_1, \ldots, b_n \in \Phi_{-1} = A$, then

$$b = f \overset{0}{+} b_0 \overset{0}{+} b_1 \overset{0}{+} \cdots \overset{0}{+} b_n = \tilde{f}(b_0^n) \in A,$$

and therefore

$$\psi : f \to \tilde{f} \tag{16}$$

is a mapping from Λ into $\Omega\,(A)$. Moreover ψ is a monomorpfism, and thus Λ may be embedded as subalgebra into $\Omega\,(A)$.

This completes the proof of Theorem.

Remark. If Λ is an arbitrary insertion algebra such that $A = \Lambda_{-1}$ is nonempty, then the mapping $f \to \tilde{f}$ is a homomorphism from Λ into $\Omega\,(A)$, but in general it is not a monomorphism. For example, let $B = \{a, b\}$, $A = \{a\}$, and

$$\Lambda = \{f \mid f \in \Omega\,(B),\ f(a, a, \ldots, a) = a\}.$$

Then Λ is an insertion algebra such that $|f| = |g| \Rightarrow \tilde{f} = \tilde{g}$, and therefore the homomorphism $f \to \tilde{f}$ from Λ into $\Omega\,(A)$ is not a monomorphism.

(¹ $f \in \Sigma$, $g_\nu \in \Lambda$.