Ѓ. Чупона

ЗА ТЕОРЕМАТА НА КОН-РЕБАНЕ

Во овој труд, прво даваме сосема едноставен доказ на добропозната теорема на Кон-Ребане ([1] стр. 185, и [2]). Потоа, се задржуваме на поимот за покривачка полугрупа за дадена алгебра, како и на прашањето за компатибилност на соодветни класи алгебри со класата полугрупи.

1. ТЕОРЕМА НА КОН-РЕБАНЕ.

Пред да ја формулираме теоремата на Кон-Ребане, со цел изнесувањето да биде што потполно, ќе дадеме објаснение на неколку поими и ознаки.

Ако ω е пресликување ω: $(a_1,\ldots,a_n)\to a$ од A^n во A, тогаш велиме дека ω е n-тарна операција во A и пишуваме $n_\omega=n$, $\omega a_1\ldots a_n=a$. (За $n_\omega=0$, ω е фиксен елемент од A). Ако Ω е фамилија операции во A, тогаш велиме дека $A(\Omega)$ е алгебра со носител A.

Ќе ја формулираме сега и докажеме теоремата на Кон-Ребане.

ТЕОРЕМА. Ако $A(\Omega)$ е алгебра, постои полугрупа M и фамилија фиксни елементи $\{d_\omega|\omega\in\Omega,\ n_\omega\geqslant 1\}$, такви што $A\subseteq M$ и:

$$(\forall\omega\in\Omega,\ n_\omega\geq 1)\ (\forall a_1,\ldots,a_n\in A)\ \omega\, a_1\ldots a_{n_\omega}=\ d_\omega a_1\ldots a_{n_\omega} \tag{1}$$

Доказ. Избираме множество симболи $D=\{d_\omega\,|\omega\in\Omega,\ n_\omega\geq 1\}$, такви што $D\cap A=\varnothing$ и $d_\omega\neq d_\tau$ за $\omega\neq\tau$. Да ја означиме со F полугрупата што е слободно генерирана од $A\cup D$. Според тоа, F се состои од сите конечни низи $u=b_1b_2...b_k$, каде што $b_\nu\in A\cup D$. (За k велиме дека е должина на u; секој елемент од $A\cup D$ има должина 1).

За еден елемент $u\in F$ велиме дека е иредуцибилен ако не содржи подниза од облик $d_\omega a_1\ldots a_{n_\omega}$, каде што $a_\nu\in A$. Множеството од сите иредуцибилни елементи на F ќе го означиме со M. Јасно е дека $A\cup D\subset M$.

Елементот $u\in F$ што не е иредуцибилен го викаме редуцибилен. Според тоа ако u е редуцибилен тогаш тој може да се претстави во облик:

$$u=v d_\omega\, a_1\ldots a_{n_\omega}\, w, \tag{2}$$

каде што $v, w \in F$, или пак некој од нив е празната низа. Ако $v \in F$, тогаш можеме да претпоставиме дека v е иредуцибилен елемент, т. е. $v \in M$. Ако $a = \omega a_1 \ldots a_n$ во $A(\Omega)$, тогаш пишуваме

$$\varphi(u) = v\, a\, w. \tag{3}$$

За $u \in M$, ставаме $\varphi(u) = u$. Јасно е дека, за секој $u \in$ F, постои природен број k таков што $\varphi^k(u) \in M$, и во тој случај ќе пишуваме:

$$\psi(u) = \varphi^k(u). \tag{3}$$

(Можеме да го избереме најмалиот број k со горната особина.) За $\psi(u)$ велиме дека е иредуцибилниот претставник на u. (Ако $u \in M$, поради $\varphi(u) = u$, имаме и $\psi(u) = u$.) Од дефинициите на φ и ψ е јасно дека:

$$\psi(\varphi(u)) = \psi(\psi(u)) = \psi(u) \tag{4}$$

и

$$\psi(v\, w) = \psi(\psi(v)\, w) = \psi(\varphi(v)\, w), \tag{5}$$

ако v е непразна низа. Ќе покажеме сега дека:

$$\psi(vw) = \psi(v\psi(w)), \tag{6}$$

ако w е непразна низа.

Точноста на (6) ќе ја покажеме со индукција по должината k на w. За $k=1$, имаме $\psi(w) = w$, па (6) е точно. Ќе претпоставиме дека $v \in F$, бидејќи за $v = \varnothing$, (6) се сведува на (4). Нека земеме w да има облик $w = w_1 d_\omega a_1 \ldots a_n w_2$, каде што $w_1 = \varnothing$ или $w_1 \in M$ и $a = \omega a_1 \ldots a_n$ во $A(\Omega)$. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned}
\psi(vw) &= \psi(vw_1 d_\omega a_1 \ldots a_n w_2) = \psi(\psi(vw_1)\, d_\omega a_1 \ldots a_n w_2) \\
&= \psi(\varphi(\psi(vw_1)\, d_\omega a_1 \ldots a_n w_2)) = \psi(\psi(vw_1)\, a w_2) \\
&= \psi(vw_1\, a\, w_2) = \psi(v\psi(w_1\, a\, w_2)) \\
&= \psi(v\, \psi(\varphi(w_1\, d_\omega\, a_1 \ldots a_n w_2))) = \\
&= \psi(v\psi(w)),
\end{aligned}$$

со што ја покажавме точноста на (6).

Сега лесно ќе ја докажеме теоремата. Во M определуваме операција "*" со:

$$(\forall u, v \in M)\ u * v = \psi(uv). \tag{7}$$

Според (5) и (6), имаме:

$$(\forall u, v, w \in M)\ (u * v) * w = \psi(\psi(uv)\, w) = \psi(uvw) = \psi(u\, \psi(v\, w)) = u * (v * w),$$

т. е. $M(*)$ е полугрупа.

Ако $\omega \in \Omega$, $n_\omega = n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ и ако $a = \omega\, a_1 \ldots a_n$ во A, тогаш имаме:

$$d_\omega * a_1 * \ldots * a_n = \psi(d_\omega\, a_1 \ldots a_n) = a = \omega a_1 \ldots a_n,$$

т. е. добиваме дека е точно равенството (1), и со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

ЗАБЕЛЕШКА. Ако се проследи доказот, ќе се уочи дека не е искористен ни еден друг поим освен поимите за алгебра, полугрупа и слободна полугрупа, а можеше и овој последен поим да се избегне. Затоа, сметаме дека овој доказ може да го усвои и еден почетник студент по математика.

2. ПОКРИВКИ

За полугрупата S велиме дека е покривка на алгебрата $A(\Omega)$ ако $A \subseteq S$ и ако постои фамилија $D = \{d_\omega \mid \omega \in \Omega, n_\omega \geq 1\}$ такви што е задоволен условот (1), и притоа $A \cup D$ е генераторно множество за полугрупата S. Нека S_1, и S_2 се две покривки на алгебрата $A(\Omega)$ со соодветни фамилии фиксни елементи $D_1 = \{d^1_\omega \mid \omega \in \Omega, n_\omega \geq 1\}$, $D_2 = \{d^2_\omega \mid \omega \in \Omega, n_\omega \geq 1\}$. За еден хомоморфизам $\xi\colon S_1 \to S_2$ велиме дека е A-хоморфизам ако:

$$(\forall\, a \in A,\ \omega \in \Omega,\ n_\omega \geq 1)\ \ \xi(a) = a,\ \xi(d^1_\omega) = d^2_\omega.$$

Јасно е дека секој A-хомоморфизам е епиморфизам и дека постои најмногу еден A-хомоморфизам од S_1 во S_2. За покривката U велиме дека е максимална ако за секоја покривка S постои A-хомоморфизам $\xi\colon U \to S$. Покривката K се вика минимална, ако секој A-хомоморфизам $\eta\colon K \to S$ е изоморфизам.

ТЕОРЕМА. (i) Ако $A(\Omega)$ е алгебра, тогаш полугрупата M, добиена при доказот на теоремата 1, е нејзина максимална покривка. Секоја максимална покривка на $A(\Omega)$ е изоморфна со M.

(ii) Нека Λ е фамилијата конгруенции α на полугрупата M што ги раздвојуваат елементите на A, т. е. со особината:

$$a, b \in A \;\&\; a\,\alpha\, b \Rightarrow a = b. \tag{8}$$

Тогаш полугрупата S, при $A \subseteq S$, е покривка на $A(\Omega)$, ако, и само ако, постои конгруенција $\alpha \in \Lambda$ таква што пресликувањето $a^\alpha \to a\ (a \in A)$ може да се прошири до изоморфизам од M/α во S.

(iii) Секоја покривка S на $A(\Omega)$ може A-хомоморфно да се преслика во некоја минимална покривка K.

Доказ. (i) Од дефиницијата на поимот максимална покривка е јасно дека две такви покривки се изоморфни, а од доказот на теоремата 1 е јасно и тоа дека полугрупата M е максимална покривка на $A(\Omega)$.

(ii) Нека S е покривка на $A(\Omega)$ и ξ A-хомоморфизам од M во S. Јадрото $\ker \xi = \alpha$ од овој хоморфизам е конгруенција во M, која го задоволува условот (8), бидејќи ξ го индуцира единичното пресликување на A.

Според тоа $\alpha \in \Lambda$ и постои изоморфизам од M/α во S, таков што $(\forall a \in A)\ a^{\alpha} \to a$. Да претпоставиме сега дека $\alpha \in \Lambda$ и дека η е изоморфизам од M/α во S со споменатата особина. Ако $a = \omega a_1 \ldots a_n$ во $A(\Omega)$, тогаш имаме:

$$d_{\omega}^{\alpha}\, a_1^{\alpha} \ldots a_n^{\alpha} = (d_{\omega} a_1 \ldots a_n)^{\alpha} = a^{\alpha} \text{ во } M/\alpha,$$

па значи и:

$$d_{\omega}^{1} a_1 \ldots a_n = a \text{ во } S,$$

каде што $d_{\omega}^{1} = \eta\,(d_{\omega}^{\alpha})$. Значи, исполнет е условот (1). А е генераторно множество за S, бидејќи $A^{\alpha} = \{a^{\sigma} | a \in A\}$ е генераторно за M/α. Од сето тоа следува дека S е ипокрвка на $A(\Omega)$.

(iii) Нека S е покривка на $A(\Omega)$. Според (ii) постои конгруенција $\alpha \in \Lambda$, и изоморфизам $\eta : S \to M/\alpha$, таков што $\eta(a) = a^{\alpha}$ за секој $a \in A$. Со помошна лемата на *Цорн* лесно се покажува дека постои максимален елемент $\beta \in \Lambda$ таков што $\alpha \subseteq \beta$. Полугрупата M/β можеме да ја сметаме за покривка на $A(\Omega)$, со тоа што секој елемент $a \in A$ ќе го идентификуваме со класата a^{α}. Поради $\alpha \subseteq \beta$, $\xi : u^{\alpha} - u^{\beta}$ е хомоморфизам од M/α во M/β. Притоа, $\xi\eta$ е A хомоморфизам од S во M/β. Преостанува да покажеме дека M/β е минимална покривка. Навистина, ако $\lambda : M/\beta \to S'$ е A-хомоморфизам од M/β во покривката S', тогаш λ. nat β ќе биде A-хомоморфизам од M во S'. Ако γ е јадрото на λ.nat β тогаш имаме $\gamma \in \Lambda$ и $\gamma \subseteq \beta$, што, поради максималноста на β, е можно само ако $\beta = \gamma$. Од сето тоа следува дека λ е изоморфизам, т. е. дека M/β е минимална покривка што и сакавме да докажеме.

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

3. КОМПАТИБИЛНОСТ.

Нека $A(\Omega)$ е алгебра, и S покривачка полугрупа за A. Ако ставиме:

$$(\forall \omega \in \Omega)\,(\forall x_1, \ldots, x_{n_{\omega}} \in S)\ \omega x_1 \ldots x_{n_{\omega}} = d_{\omega}\, x_1 \ldots x_{n_{\omega}} \tag{9}$$

добиваме алгебра $S(\Omega)$ за која што дадената алгебра $A(\Omega)$ е подалгебра.

За една класа алгебри Σ велиме дека е компатибилна со класата полугрупи, ако за секоја алгебра $A(\Omega)$ од оваа класа постои покривка S таква што и $S(\Omega)$ да припаѓа на истата класа. Овде ќе се задржиме на прашањето за компатибилност на класите групи, прстени, мрежи, како и на неколку класи групоиди, со класата полугрупи.

Пред да ја формулираме теоремата ќе воведеме неколку ознаки. Имено, со K, I, E ја означуваме, соодветно, класата од комутативни, идемпотентни, ентропични групоиди, т. е.

$$G(*) \in K \Leftrightarrow (\forall x,\ y \in G)\ x*y = y*x, \tag{10}$$

$$G(*) \in I \Leftrightarrow (\forall x \in G)\ x*x = x, \tag{11}$$

$$G(*) \in E \Leftrightarrow (\forall x, y, u, v \in G)\ (x*y)*(u*v) = (x*u)*(y*v) \tag{12}$$

Како што е добро познато, групите можат да се дефинираат на најразлични начини, па според тоа и различни класи алгебри можат да се сметаат за претставници на групите. Да спомeнеме само два начини. Со G_1 ќе ја означиме класата групи сметани како алгебри со по една бинарна операција, а со G_3 класата групи со по три операции. Значи:

$$\begin{aligned} G(*,{}^{-1},e)\in G_3 \Leftrightarrow (\forall x,\ y,\ z\in G)\ & (x*y)*z=x*(y*z) \\ & x*e=e*x=x \\ & x*x^{-1}=x^{-1}*x=e. \end{aligned} \tag{13}$$

Во иста смисла, со R_2 ја означуваме класата прстени, при што прстенот се смета за алгебра со две операции. Со M ја означуваме класата мрежи.

Ќе ја докажеме сега следната

ТЕОРЕМА. Ниедна од класите K, I, E, G_3, R_2, M не е компатибилна со класата полугрупи.

Доказ. Нека S е полугрупа, d фиксен елемент од S и нека:

$$(\forall x,\ y\in S)\ x*y=dxy \tag{14}$$

1) Ако $S(*)\in K$, т. е. ако $(\forall x,\ y\in S)\ dxy=dyx$, ќе имаме:

$$\begin{aligned} (\forall x,\ y,\ z\in S)\ (x*y)*z &= ddxyz=(ddx)\,yz \\ &= (dxd)\,yz=dxdyz \\ &= x*(y*z) \end{aligned} \tag{15}$$

2) Ако $S(*)\in I$, т. е. ако $(\forall x\in S)\ dx^2=x$, ќе имаме, прво $d^3=d$ а потоа и:

$$\begin{aligned} (\forall x\in S)\ a^2x &= d^3x^2=dx^2=x \\ dx &= d\,(dx^2)=d^2x^2=x^2 \\ x^3 &= x^2x=dx\,.\,x=dx^2=x \end{aligned}$$

Од тоа следува:

$$(\forall x,\ y\in S)\ x*(x*y)=dx\,dxy=dxx^2\,y=dx^3\,y=dxy=x*y \tag{16}$$

3) Нека $S(*)\in E$. Тогаш, според (12) и (14) имаме:

$$(\forall x,\ y,\ u,\ v\in S)\ ddxyduv=ddxudyv \tag{17}$$

т. е.

$$(x*y)*[z*(u*v)]=(x*y)*[u*(z*v)] \tag{18}$$

Поради тоа што постојат комутативни групоиди што не се полугрупи, од 1) следува дека е точно изнесеното тврдење за класата K. Имајќи го предвид тоа што постои групоид од класата I што не го задоволува идентитетот (16), како и групоид од Е што не го задоволува идентитетот (18), заклучуваме дека и класите I, E не се компатибилни со класата полугрупи.

4) Нека S е полугрупа, а $c, d,$ и e фиксни елементи на S. Да претпоставиме дека $S(*,^{-1}, e)$ е група, т.е. $S(*,^{-1}, e) \in G_3$, каде што операцијата „$*$" е определена со (14), а „$^{-1}$" со:

$$(\forall x \in S)\ x^{-1} = cx \tag{14'}$$

Според тоа, имаме:

$$\begin{aligned}(\forall y, z, x \in S)\ ddxyz &= dxdyz \\ dxcx &= dcxx = e \\ dxe &= dex = x.\end{aligned} \tag{19}$$

(i) Ќе покажеме прво дека во полугрупата S важи законот за кратење. Навистина, од $xy = xz$ следува: $dxy = dxz$, т. е. $x*y = x*z$, па и $y = z$. Од исти причини, $yx = zx \Rightarrow y = z$.

(ii) Од (i) и (19) добиваме:

$$(\forall x \in S)\ xd = dx,\ cx = xc,\ ex = xe. \tag{20}$$

(iii) Од (19) и (20) следува дека $de = ed$ е единица во полугрупата S.

(iv) Ако во идентитетот $dcxx = e$, ставиме $x = de$, добиваме: $e = dcdede = dc$. Според тоа, имаме: $ex^2 = e$, од што следува $de = de\ x^2 = x^2$. Ставајќи (во последниот идентитет) $x = e$, добиваме $de = e^2$, т.е. $d = e$. Потоа, поради $dc = e$, имаме $ec = e$, т. е. $ec^2 = ec$, од што следува дека $c = e^2 = c$ е единица во полугрупата S Сега поради $ex^2 = e = ec$, добиваме:

$$(\forall x \in S)\ x^2 = c. \tag{21}$$

(v) Од (21), ако се има предвид дека c е единица на S, следува дека S е е комутативна група, а од тоа дека и групата $S\ (*,^{-1}, e)$ќе биде комутативна при што

$$(\forall x \in S)\ x^{-1} = x. \tag{21'}$$

Од сета спроведена дискусија следува дека и класата G_3 не го исполнува условот за компатибилност, бидејќи постојат и некомутативни групи.

5) Нека $S(+,*)$ е прстен каде што операцијата „$*$" е определена со (14), а "$+$" со:

$$(\forall x, y \in S)\ x + y = cxy \tag{14''}$$

Ако се има предвид дека $S(+)$ е комутативна група, од (14″) се добива дека и S е комутативна група. Но, тогаш и $S(*)$ ќе биде (комутативна) група, што е можно само ако S е едноелементно множество.

Значи, и R_2 не го исполнува условот за компатибилност.

6) Нека $S(\cup, \cap)$, е мрежа, каде што операциите „$\cup$" и „$\cap$" се определени со:

$$(\forall x, y \in S)\ x \cup y = axy,\ x \cap y = bxy, \tag{14'''}$$

при што a и b се фиксни елементи од S. Тогаш, имајќи предвид дека и двете операции „$\cup$" и „$\cap$" се идемпотентни, според 2), добиваме:

$$(\forall x, y \in S)\ x \cup y = axy = x^2y = bxy = x \cap y, \tag{22}$$

што е можно само ако S е едноелементно множество. Од ова следува дека и класата M не го исполнува условот за компатибилност.

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

Да забележиме дека класата полугрупи, како и класата G_1, го исполнуваат условот за компатибилност, што е сосема очебијно. Од 4) следува дека подкласата H од G_3 што ги содржи комутативните групи со особината: $(\forall x)x^{-1}=x$, исто така е компатибилна со класата полугрупи. Но, ниедна класа прстени (мрежи) што содржи прстени (мрежи) со повеќе од еден елемент не го исполнува условот за компатибилност.

Од докажаната теорема, и направените забелешки, следува дека освен тривијалните случаи, важните класи алгебри со бинарни операции не го задоволуваат условот за компатибилност. Во [3] и [4], (втор дел на Теоремата 2) е даден пример на компатибилна класа алгебри со произволен број финитарни операции.

Во врска со овие резултати, се наложува проблемот за поблиско карактезирање на класите алгебри што се компатибилни со класата полугрупи.

4. РЕДУЦИРАНОСТ.

За алгебрата $A(\Omega)$ велиме дека е редуцирана, ако постои полугрупа $A(.)$ која што е покривка на $A(\Omega)$.

Како последица од теоремите 2 (i) и 3, ја добивама и следнава

ТЕОРЕМА. (i) Нека M е максималната покривка на алгебрата $A(\Omega)$. Тогаш $A(\Omega)$ е предуцирана, ако, и само ако, постои конгруенција ρ во M, таква што:

$$\{a, b \in A\ \&\ a \rho b \Rightarrow a=b\}\ \&\ \{(\forall u \in M)(\exists a \in A)\ a \rho u. \tag{23}$$

(ii) Секоја полугрупа е редуцирана.

(iii) Еден комутативен групоид е редуциран, ако, и само ако, е полугрупа.

(iv) Групата $G(*^{-1}, e)$ е редуцирана, ако и само ако $(\forall x \in G)\ x=x^{-1}$.

(v) Прстенот R (мрежата M) е редуциран, ако и само ако е едноелементен.

На крајот, да забележиме дека се познати и други начини за претставување на алгебри во групоиди. Така, за секоја алгебра $A(\Omega)$, постои групоид $G(*) \in E$ таков што $A \subseteq G$, а операциите од Ω се соодветни полиноми во тој групоид ([5]). Проблемите што се третирани во оваа работа можат да се третираат и во случај на било кој друг начин на претставување.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cohn P. M., Universal algebra, New-York 1965

[2] Ребане Ю. К., Об одном представлении произвольных универсальных алгебр в полугруппах (непечатено).

[3] Ребане Ю. К. О предетавлении универсальных алгебр в коммутативных полугруппах, Сиб. Мат. Журн. 7 (19 66) 878—885.

[4] Ćupona G., On some primitive classes of universal algebras, Matemat. vesnik 3(18) 2 (1966) 105—109

[5] Radojčić M. D., On the embedding of universal algebras in groupoids holding the law XYoZUoo=XZoYUoo, Matemat. vesnik 5(20), 3 (1968) 352—366.

G. Čupona

ON COHN-REBANE'S THEOREM

Summary

A short discussion on Cohn-Rebane's theorem is made. At first, an elementary proof of this theorem is given, and then the notions of coverings and compatibility are considered.

1. COHN-REBANE'S THEOREM. Let $A(\Omega)$ be a universal algebra. There is a semigroup M and a family of fixed elements $D=\{d_\omega \mid \omega\in\Omega,\ n_\omega\geq 1\}$ (n_ω is the arity of ω) such that $A\subseteq M$, and

$$(\forall\omega\in\Omega.\ n_\omega\geq 1)\,(\forall\ a_1,\ldots,\ a_{n_\omega}\in A)\ \omega\, a_1\ldots a_{n_\omega}=d_\omega\, a_1\ldots a_{n_\omega}\,. \qquad (1)$$

Proof. Let $D=\{d_\omega \mid \omega\in\Omega,\ n_\omega\geq 1\}$ be a collection of elements such that $A\cap D=\emptyset$ and $\omega\neq\tau\Rightarrow d_\omega\neq d_\tau$. Denote by F the semigroup with identity e, which is freely generated by the set AUD.

An element $u\in F$ is said to be irreducible if it can not be written in the following form

$$u=v\,d_\omega\, a_1\ldots a_n\, w, \qquad (2)$$

where $v,w\in F, a\in A$. Otherwise, u is said to be reducible. Therefore, every reducible element $u\in F$ has a form (2), and it may be supposed that v is irreducible. Then, if $a=\omega\, a_1\ldots a_n$ in $A(\Omega)$, we write

$$\varphi\ (u)=vaw. \qquad (3)$$

Clearly, there is a natural number k such that $\varphi^k(u)$ is irreducible, and then we write

$$\psi(u)=\varphi^k\,(u). \qquad (4)$$

If u is irreducible, then

$$\varphi(u)=\psi(u)=u. \qquad (4')$$

From the definitions of φ and ψ it follows:

$$(\forall\ v,\ w\in F)\ \psi(vw)=\psi(\varphi(v)w)=\psi(\psi(v)w). \qquad (5)$$

By induction on the lenth of w, we shall prove that:

$$(\forall\ v,\ w\in F)\ \psi\,(vw)=\psi(v\psi w)) \qquad (6)$$

[1] [1] p. 185, and [2].

Suppose that $w=w_1 d_\omega a_1 \ldots a_n w_2$, where w_1 is irreducible, and $a=\omega\, a_1 \ldots a_n$ in $A(\Omega)$. Then we have:

$$\begin{aligned}\psi(vw) &= \psi(vw_1 d_\omega a_1 \ldots a_n w_2) = \psi(\psi(vw_1)\, d_\omega a_1 \ldots a_n w_2) = \\ &= \psi(\varphi(\psi(vw_1(\, d_\omega a_1 \ldots a_n w_2)) = \psi(\psi(vw_1)\, a w_2) = \\ &= \psi(vw_1 a w a_2) = \psi(v\, \psi(w_1 w_2)) = \psi(v\psi(\varphi(w)) = \\ &= \psi(v\, \psi\,(w)).\end{aligned}$$

Now, we shall complete the proof of the theorem.

Let M be the set of all the irreducible elements od F different from e. If a binary operation „$*$" is defined in M by:

$$(\forall\, u,\ v \in M)\ u * v = \psi(uv), \tag{7}$$

then, by (5) and (6), we have:

$$(\forall\, u,\ v,\ w \in M)(u * v) * w = \psi(\psi(uv)w) = \psi(uvw) = \psi(u\psi(vw)) = u * (v * w),$$

i. e. $M(*)$ is a semigroup. Suppose that $\omega\ a_1 \ldots a_n = a$ in $A(\Omega)$. Then we have:

$$d_\omega * a_1 * \ldots\ a_n = \psi(d_\omega\, a_1 \ldots a_n) = a,$$

i. e. (1) is satisfied. This completes the proof of the theorem.

2. COVERINGS. Let $A(\Omega)$ be an algebra, and S a semigroup with a system of fixed elements $D=\{d_\omega \mid \omega \in \Omega,\ n_\omega \geq 1\}$, such that (1) is satisfied. If, in addition, $A \cup D$ is a generating subset of S, then S is said to be a covering semigroup of $A(\Omega)$. Clearly, if S_1 and S_2 are two coverings of $A(\Omega)$, then there is at most one homomorphism $\lambda\colon S_1 \to S_2$, such that:

$$(\forall\, a \in A,\ \omega \in \Omega.\ n_\omega \geq 1)\ \lambda(a) = a,\ \lambda(d_\omega{}^1) = d_\omega{}^2, \tag{8}$$

where $D_i = \{d^i{}_\omega \mid \omega \in \Omega,\ n_\omega \geq 1\}\,(i=1,2)$ are the corresponding systems of fixed elements. If such a homomorphism exists, it is called A-homomorphism. A covering U of $A(\Omega)$ is said to be universal if for every covering S of $A(\Omega)$ there is an A-homomorphism $\xi\colon U \to S$. A covering R is said to be a reduced one if every A-homomorphism $\eta\colon R \to S$ is an isomorphism.

THEOREM. Let $A(\Omega)$ be an algebra.

(i) The semigroup M defined in **1** is a universal covering of $A(\Omega)$.

(ii) Denote by Λ the collection of congruences on the semigroup M which separate the elements of A. Then a semigroup S is a covering of $A(\Omega)$, if and only if, $A \subseteq S$ and $S \cong M/\rho$, for some $\rho \in \Lambda$.

(iii) There is a covering $A(*)$ of $A(\Omega)$, if and only if

$$(\exists \alpha \in \Lambda)\ (\forall\, y \in M)\ (\exists a \in A)\ a\alpha u. \tag{9}$$

(iv) Every covering S of $A(\Omega)$ can be A-homomorphicaly mapped onto a reduced covering R of $A(\Omega)$.

3. COMPATIBILITY. Let Σ be a class of algebras. Σ is said to be compatible with the class of semigroups, if every algebra $A(\Omega) \in \Sigma$ can be embedded in a semigroup S such that (1) is satisfied, and $S(\Omega) \in \Sigma$ where:

$$(\forall \omega \in \Omega)\,(\forall\, x_1, \ldots, x_n \in S)\ \omega\, x_1 \ldots x_n = d_\omega\, x_1 \ldots x_n\,. \tag{1'}$$

THEOREM. Neither of the classes of: 1) idempotent groupoids, 2) commutative groupoids, 3) entropic groupoids, 4) quasigroups, 5) rings, 6) lattices, 7) three-operations groups — is compatible with the class of semigroups. The classes of: 8) semigroups, 9) one-operation groups and 10) three-operations groups with $x^{-1}=x$, satisfy the condition of compatibility.

The last results suggest the problem of finding conditions under which a variety is compatible with the class of semigroups.