ЗА НЕЗАВИСНОСТА НА СИСТЕМОТ АКСИОМИ НА КОНЕЧНИТЕ ПСЕВДОТЕРНАРИ

А. Самарџиски

1. Во оваа работа се испитуваат аксиомите на конечните псевдотернари, како и врската меѓу псевдотернарите и тернарите. Најпрво се дава дефиниција на псевдотернар и тернар, потоа се даваат два примера на псевдотернари, кои што не се тернари и се дава алгебарски доказ на познатата теорема дека секој псевдотернар со два и три елементи е тернар. На крајот, со примери, се покажува дека системот аксиоми на конечен псевдотернар е независен.

2. Тернари. Нека G е тело (не неопходно поле). Ако во G дефинираме тернарна операција T со $T(x, y, z)=xy+z$ се добива тернарна структура $G(T)$ што ги задоволува следниве услови:

1.° $(\forall a, c \in G)\ T(0, a, c)= \ T(a, 0, c)=c.$

2.° $(\forall a \in G)\ T(a, 1, 0)=T(1, a, 0)=0,$

3.° $(\forall a, b, c \in G)\ (\exists!\, z \in G)\ T(a, b, z)=c,$

4.° $(\forall a, b, c, d \in G;\ a \neq c)\ (\exists!\, x \in G)\ T(x, a, b)=T(x, c, d),$

5.° $(\forall a, z\, c, d \in G;\ a \neq c)\ (\exists!\, x, y \in G)\ T(a, x, y)=b,\ T(c, x, y)=d,$

6.° $(\forall a, b, c \in G;\ a \neq 0)\ (\exists!\, y \in G)\ T(a, y, b)=c,$

7.° $(\forall a, b, c \in G;\ a \neq 0)\ (\exists!\, x \in G)\ T(x, a, b)=c,$

каде што 0 е нулата, а 1 е единицата на телото. Познато е дека при координатизација на една проективна рамнина се добива тернарна структура со горните особини, коишто не се независни. За тернарната структура $G(T)$ се вели дека е *тернар* ако ги задоволува условите **1**°—**5**°. Се покажува [4] дека секој тернар ги задоволува и условите **6**° и **7**°. Во случај множеството G да е конечно, се покажува [4] дека условот **5**° е последица од претходните, а исто така и условот **4**° е последица од **1**°, **2**°, **3**° и **5**°.

2. Псевдотернари. За една тернарна структура $G(T)$ се вели дека е *псевдотернар* ако ги задоволува условите **1**°, **2**°, **3**°, **6**° и 7°. Притоа 0 и 1 се два фиксни елемента од G. До поимот за псевдоетрнар се доаѓа при координатизација на псевдотермнина [3]. Од погоре кажаното следува дека секој тернар е и псевдотеранр .Но, обратното не важи. За да го илустрираме тоа ќе дадеме два примера.

1) Нека $G=Z_4=\{0, 1, 2, 3\}$ е адитивната група по мод 4, а множење нека дефинираме со следнава шема:

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Ако ставиме $T(x, y, z) = xy+z$ добиваме тернарна структура $G(T)$, којашто е песводтернар но не е тернар, зашто на пример равенката $T(x, 1, 0)=T(x, 2, 3)$ има две различни решенија $x=1$ и $x=2$, т.е. условот **4**° не е исполнет.

2) Нека $G=Z_8$ е адитивната група по мод 8, а множење нека дефинираме со следнава шема:

.	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	3	4	5	6	7	1
3	0	3	1	2	6	7	4	5
4	0	4	5	6	7	1	2	3
5	0	5	6	7	1	2	3	4
6	0	6	7	1	3	4	5	2
7	0	7	4	5	2	3	1	6

Ако ставиме $T(x, y, z) = xy + z$ добиваме тернарна структура $G(T)$, која што е псевдотернар, но не е тернар, зашто на пример равенката $T(x, 2, 3))= = T(x, 3, 2)$ има дури шест различни решенија $x=1, 2, 3, 4, 5, 7$.

Да забележиме и тоа дека за секое $n \geq 2$, постои псевдотернар со n елементи. Навистина, ако $G=\{0, 1, a_3, \ldots, a_n\}$ е множество со n елементи, тогаш можеме да дефинираме две бинарни операции „+" и „.", такви што $G(+)$ и $G^*(\cdot)$ се циклични групи и $0x=x0=0$ за секој $x \in G$. Потоа, ако дефинираме тернарна операција T со $T(x, y, z)=xy+z$ добиваме тернарна структура, којашто е псевдотернар. За тернари ова не важи. Од тероемата на Bruck и Ryser [1] за неегзистенција на конечни проективни рамнини следува дека, ако е $n \equiv 1$ (мод 4) или $n \equiv 2$ (мод. 4) и ако бројот n, ослободен од квадрат, содржи барем еден прост делител од облик $4к+3$, тогаш тернар со n елементи не постои. Такви се, на пример, броевите $n=6$ и $n=14$. За други броеви n, коишто не се степен од прост број и не се опфатени во теоремата на Bruck и Ryser, не е познато дали постои тернар со n елементи.

Ќе дадеме алгебарски доказ на следната теорема, којашто геоемтриски е докажана во [3].

Т. 1. Секој псевдотернар со два или три елемента е тернар.

Доказ. 1. Нека е $G=\{0, 1\}$ и нека $G(T)$ е псевдотернар. За да покажеме дека $G(T)$ е тернар, доволно е да покажеме дека во псевдотернарот е исполнет условот **4°**. Во овој случај равенки од облик

$$T(x, a, b) = T(x, c, d),\ a \neq c \tag{1}$$

ги има три, и тоа:

$$T(x, 0, 0) = T(x, 1, 0), \tag{2}$$

$$T(x, 0, 1) = T(x, 1, 0), \tag{3}$$

$$T(x, 0, 1) = T(x, 1, 1). \tag{4}$$

Равенката (2) има единствено решение $x=0$, равенката (3) има единствено решение $x=1$, а равенката (4) се сведува на равенката $T(x, 1, 1) = 1$, којашто, според **7°**, има единствено решение $x=0$. Значи псевдотернарот $G(T)$ е тернар.

2. Нека е $G=\{0, 1, m\}$ и нека $G(T)$ е псевдотернар. Како и случајот **1.** ќе покажеме дека рвенката (1) има единствено решение по x. Ако е $a=0$, тогаш равенката (1) се сведува на $T(x, c, d)=b$, која, поради $c\neq 0$, има единствено решение. Слично, ако е $c=0$. Ако е пак $b=d$, тогаш $x=0$ е единствено решение на таа равенка, зашто ако и $x\neq 0$ е решение, тогаш равенката $T(x, y, b)=z$ би имала две различни решенија по y и тоа $y=a$ и $y=c$, што противречи на **6°**. Според тоа остануваат да се разгледаат уште следните шест равенки:

$$T(x, 1, 0) = T(x, m, 1); \tag{5}$$

$$T(x, 1, 0) = T(x, m, m), \tag{6}$$

$$T(x, 1, 1) = T(x, m, 0), \tag{7}$$

$$T(x, 1, 1) = T(x, m, m), \tag{8}$$

$$T(x, 1, m) = T(x, m, 0), \tag{9}$$

$$T(x, 1, m) = T(x, m, 1). \tag{10}$$

Јасно е дека $x=0$ не може да биде решение на ниенда од овие шест равенки.

Да покажеме дека равенката (5) има единствено решение. Бидејќи е $T(0, m, 1) = 1$, $x=1$ не е решение. Значи, решение може да биде само $x=m$. Елементот $T(m, m, 1)$ може да биде или 0, или 1, или m. Ако е $T(m, m, 1)=0$, тогаш мора да биде $T(m, m, 0)=0$ и $T(m, m, m)=m$. Но бидејќи е $T(0, m, m)=m$, имаме $T(m, m, m)\neq m$, па и $T(m, m, 1)\neq 0$. Ако е $T(m, m, 1)=1$, тогаш равенката $T(y, m, 1)=1$ би имала две решенија $y=0$ и $y=m$, што не е можно. Значи, имаме $T(m, m, 1)=m$, т.е. равенката (5) има единствено решение.

Слично добиваме дека равенката (6) има единствено решение $x=1$.

Да ја разгледаме равенката (7). Бидејќи е $T(m, 1, 1) = 0$, а $T(m, m, 0)\neq 0$, следува дека $x = m$ не е решение на (7). Затоа, да го разгледаме елементот $T(1, 1, 1)$. Од $T(m, 1, 1) = 0$ следува $T(1, 1, 1) \neq 0$, а бидејќи е $T(1, 0, 1) = 1$ следува дека е $T(1, 1, 1) \neq 1$. Значи имаме $T(1, 1, 1) = m = T(1, m, 0)$, т. е. равенката (7) има единствено решение $x = 1$.

За равенката (8), бидејќи е $T(1, 1, 1) = m$, $T(1, m, m) = 1$, следува дека $x = 1$ не е решение. Од друга страна имаме $T(m, 1, 1) = 0$ и $T(m, m, m) = 0$, т. е. равенката (8) има единствено решение $x = m$.

За равенката (9), бидејќи е $T(1, m, 0) = m$, $T(1, 1, m) = 0$, следува дека $x = 1$ не е решение. Од друга страна имаме $T(m, 1, m) = 1 = T(m, m, 0)$, т. е. равенката (9) има единствено решение $x = m$.

На крајот, бидејќи е $T(m, 1, m) = 1$, $T(m, m, 1) = m$, следува дека $x=m$ не е решение на равенката (10). Од друга страна имаме $T(1, 1, m) = 0 = T(1, m, 1)$, т. е. $x = 1$ е единствено решение на равенката (10).

Со тоа е комплетиран доказот на теоремата.

Во **2** споменавме дека, ако множеството G е конечно, тогаш системот аксиоми на тернарот $G(T)$ може да се намали, т. е. условот **4**° е последица од останатите, а исто така условот **5**° е последица од останатите. За конечни псевдотернари ќе ја докажеме следната теорема.

Т. 2. Ако множеството G е конечно и ако $G(T)$ е псевдотернар, тогаш ниеден од условите **1**°, **2**°, **3**°, **6**° и **7**° не е последица од останатите, т. е. системот аксиоми на псевдотернарот $G(T)$ е независен.

Доказ. За да ја докажеме теоремата ќе конструираме тернарни структури, коишто не задоволуваат само еден од условите **1**°, **2**°, **3**°, **6**°,и **7**°.

(i) Нека $Z_5(+)$ е адитивната група по мод 5, а $Z_5(\cdot)$ нека е циклична група со генератор 0 и единица 1, т. е. $2=0^2$, $3=0^3$, $4=0^4$, $1=0^5$. Ако во Z_5 дефинираме тернарна операција T со:

$$T(x, y, z) = x\,y + z \tag{11}$$

тогаш тернарната структура $Z(T)$ ги задоволува исловите **2**°, **3**°, **6**° и **7**°, но не го задоволува условот **1**°, Значи, **1**° не е последица од останатите услови.

(ii) Нека $G(+)$ е циклична група со ред 5, а групоидот $G(\cdot)$ нека е дефиниран со шемата:

.	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	b	a	d	c
b	0	c	b	a	b
c	0	a	d	c	b
d	0	d	c	b	a

Ако во G дефинираме тернарна операција T со (11), тогаш тернарната структура $G(T)$ ги задоволува условите **1°**, **3°**, **6°** и **7°**, но не го задоволува условот **2°**. Значи, **2°** не е последица од останатите услови.

(iii) Во полето Z_3 од класи на остатоци по мод 3, да дефинираме тернарна операција T со

$$T(x, y, z) = xyz^2 + xy + z.$$

Тернарната структура $Z_3(T)$ ги задоволува условите **1°**, **2°**, **6°** и **7°**, но не го задоволува условот **3°**, зашто, на пример равенката $T(1, 1, z) = 1$, има две различни решенија $z = 0$ и $z = 2$. Значи, **3°** не е последица од останатите услови.

(iv) Во полето Z_3 да дефинираме тернарна операција T со

$$T(x, y, z) = xy^2 + z.$$

Тернарната структура $Z_3(T)$ ги задоволува условите **1°**, **2°**, **3°** и **7°**, но не го задоволува условот **6°**, зашто равенката $T(1, y, 1) = 2$ има две различни решенија $y = 1$ и $y = 2$. Значи, **6°** не е последица од останатите услови.

(v) Ако во полето Z_3 дефинираме тернарна операција T со

$$T(x, y, z) = x^2y + z,$$

добиваме тернарна структура $Z_3(T)$ што ги задоволува условите **1°**, **2°**, **3°** и **6°**, но не го задоволува условот **7°**, зашто равенката $T(x, 1, 1) = 2$ има две различни решенија $x = 1$ и $x = 2$. Значи, **7°** не е последица од останатите услови.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bruck R. H., Ryser H. J., *The non-existence of certain finite projective planes*, Canad. Jour. Math., 1 (1949), 88—93.

[2] Самарџиски А., *За псевдотернарите*, Билтен на ДМФ на СРМ, XX (1969), 23—28.

[3] Sandler R., *Pseudo planes and pseudo ternaries*, Journal of Algebra, 4 (1966), 300—316.

[4] Wesson J. R., *Finite plane projective geometries*, Amer. Math. Monthly, 62 (1955), 32—40.

A. Samardžiski

ON THE INDEPENDENCE OF THE AXIOMS OF FINITE PSEUDOTERNARS

(Summary)

In this note the axioms of the finite pseudoternars are examined. There are given two exampls of pseudoternars which are not ternars, and an algebraic proof is given for the known theorem that every pseudoternar with 2 and 3 elements is ternar. It is shown, at the end, that the system of axioms (1°, 2°, 3°, 5°) for the finite pseudoternars is independent.