ЗА КВАЗИПРСТЕНИТЕ

Ѓ. Чуйона

Во оваа забелешка се врши куса дискусија во врска со класата квази-прстени, којашто е еквивалентна со класата прстени.

1. *Квазийрсшени.* Нека R е непразно множество и „$+$", „$\circ$" две (бинарни) операции во R со следните особини:

(i) $R(+)$ е комутативна група

(ii) $(\forall x, y, z \in R)\ x \circ (y+z) = x \circ y + x \circ z - x$

$$(x+y) \circ z = x \circ z + y \circ z - z.$$

Тогаш, велиме дека $R(+, \circ)$ е квазипрстен. За квазипрстенот велиме дека е комутативен, односно асоцијативен, ако соодветната особина ја има операцијата „$\circ$".

Со директна проверка се установува дека:

1°. Ако $R(+, \circ)$ е прстен, и ако операцијата „$\circ$" е определена со:

$$(\forall x, y, z \in R)\ x \circ y = x + y - xy^{1)} \tag{1}$$

тогаш $R(+, \circ)$ е квазипрстен. И обратно, ако $R(+, \circ)$ е квазипрстен и ако операцијата „." е определена со:

$$(\forall x, y, z \in R)\ xy = x + y - x \circ y \tag{1'}$$

тогаш $R(+, .)$ е прстен. Прстенот $R(+, .)$ е:

а) комутативен, б) асоцијативен, ако и само ако, соодветната особина ја има квазипрстенот $R(+, \circ)$.

Може да се изнесе и уште појако тврдење, имено, дека теориите на прстените и квазипрстените се еквивалентни во таа смисла што секој поим осмислен за класата прстени има свој еквивалент во класата квазипрстени, а и обратно. На пример:

---

[1]) Улогата на оваа операција во теоријата на прстените е добро позната. (Да се види, на пример, N. H. McCoy: THE THEORY OF RINGS, New York 1964 стр. 110).

1) Ако $R(+,.)$ е поле, тогаш квазипрстенот $R(+,\circ)$ ги има следните особини:

(iii) $(\forall x, y \in R)\ x \circ y = y \circ x$

(iv) $(\exists e \in R,\ e \neq 0)\ (\forall x \in R)\ x \circ e = e$

(v) $(\forall x \in R,\ x \neq 0)\ (\exists x^{-1} \in R)\ x \circ x^{-1} = x + x^{-1} - e.$

И обратно, ако квазипрстенот $R(+,\circ)$ ги задоволува условите (iii) — (v) тогаш соодветниот прстен $R(+,.)$ е поле.

2) Ако квазипрстенот $R(+,\circ)$ е таков што мултипликативниот групоид $R(\circ)$ е група, тогаш прстенот $R(+,.)$ е асоцијативен и ја има следнава особина

(vi) $(\forall x \in R)\ (\exists x^* \in R)\ xx^* = x + x^*.$

И обратно, ако во еден асоцијативен прстен е исполнета особината (vi), тогаш во соодветниот квазипрстен $R(+,\circ)$ мултипликативниот групоид $R(\circ)$ е група.

Да споменеме уште една особина на квазипрстените чијшто доказ е јасен.

2°. Ако $R(+,\circ)$ е квазипрстен тогаш:

(vii) $\left(\sum\limits_1^m x_i\right) \circ \left(\sum\limits_1^n y_j\right) = \Sigma(x_i \circ y_j) - (n-1)\,\Sigma\, x_i - (m-1)\,\Sigma\, y_j,$

за секои $x_1, \ldots, x_m, y_j, \ldots, y_n \in R$.

2. *Сместување на даден групоид во квазипрстен.* Добро е познато дека секој групоид $G(.)$ може да се смести во прстен R, така што дадениот групоид да биде подгрупоид од мултипликативниот групоид на прстенот. Овде ќе покажеме дека истото важи и за класата квазипрстени. Имено тоа се гледа од следната особина.

3°. Нека $G(\circ)$ е даден групоид. Постои квазипрстен $R(+,\circ)$ таков што групоидот $G(\circ)$ е подгрупоид од $R(\circ)$.

Доказ. Нека $R(+)$ е слободната (адитивно означена) абелова група генерирана од G, т.е. R се состои од сите формални збирви $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n$, каде што $\xi_1, \ldots, \xi_n$ се цели броеви, а $x_1, \ldots, x_n$ елементи од G. Притоа, ако $x_1, \ldots, x_n$ се меѓу себе различни, како и $y_1, \ldots, y_m$, имаме:

$$\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n = \eta_1 y_1 + \ldots + \eta_m y_m \Leftrightarrow n = m,\ x_\nu = y_\nu\,;$$

освен тоа: $1x = x$, $0x = 0$ (= нулата на групата.)

Како што е добро познато, елементите од R можеме да ги претставиме во облик $\sum\limits_{x \in G} \xi_x \cdot x$, каде ξ_x се цели броеви, при што само за конечно многу елементи x, ξ_x може да не е нула. Тогаш, нулата на R има облик $\sum\limits_{x \in G} 0.x$, а собирањето е определено со:

$$\left(\sum_x \xi_x \cdot x\right) + \left(\sum_x \eta_x \cdot x\right) = \sum_x (\xi_x + \eta_x)\, x. \tag{1}$$

Операцијата множење „о" во R ја дефинираме со:

$$\left(\sum_x \xi_x x\right) \mathrm{o} \left(\sum_y \eta_y y\right) = \sum_{x,y} (\xi_x \cdot \eta_y)(x \mathrm{o} y) + \\ + \left(1 - \sum_x \eta_y\right) \sum_x \xi_x x + \left(1 - \sum_x \xi_x\right) \sum_y \eta_y y. \tag{2}$$

Ако се има предвид дека при $\xi_x = 0$ за $x \neq a$ и $\xi_a = 1$, имаме $a = \sum_x \xi_x x$, тогаш добиваме дека G (о) е подгрупоид од R (о). Со директна проверка се покажува дека се исполнети и равенствата (ii), од што ќе следува дека $R(+, \mathrm{o})$ е квазипрстен. Ке докажеме едно од тие рвенства.

Нека $u = \sum_x \xi_x x$, $v = \sum_y \eta_y y$, $w = \sum_y \zeta_y y$ се три елементи од R. Тогаш имаме:

$$u \mathrm{o} (v + w) = \left(\sum_x \xi_x x\right) \mathrm{o} \left(\sum_y (\eta_y + \zeta_y) y\right) =$$

$$= \sum_{x,y} \xi_x (\eta_y + \zeta_y)(x \mathrm{o} y) + \left[1 - \sum_y (\eta_y + \zeta_y)\right] \sum_x \xi_x x + \left(1 - \sum_x \xi_x x\right) \sum_y (\eta_y + \zeta_y) y =$$

$$= \sum_{x,y} \xi_x \eta_y (x \mathrm{o} y) + \sum_{x,y} \xi_x \zeta_y (x \mathrm{o} y) + \left(1 - \sum_y \eta_y\right) \sum_x \xi_x x + \left(1 - \sum_y \zeta_y\right) \sum_x \xi_x x +$$

$$+ \left(1 - \sum_x \xi_x\right) \sum_y \eta_y y + \left(1 - \sum_x \xi_x\right) \sum_y \zeta_y y - \sum_x \xi_x x = u \mathrm{o} v + u \mathrm{o} w - u.$$

На потполно ист начин се докажува и другото равенство, со што би се комплетирал доказот на особината.

(Да забележиме и тоа дека ако дадениот групоид G (о) е комутативен, односно асоцијативен, тогаш соодветната особина ќе ја има и конструираниот квазипрстен $R(+, \mathrm{o})$).

Ќе изнесеме и една последица на докажаната особина.

4°. Нека G (о) е даден групоид. Постои прстен $R(+, .)$, таков што, $G \subseteq R$ и: $x\mathrm{o}y = x + y - xy$, за секои $x, y \in G$.

Доказ. Според 3°, постои квазипрстен $R(+, \mathrm{o})$, таков што G (о) е подгрупоид од R (о). Ако во R определиме операција „.", со $x \cdot y = x + y - x\mathrm{o}y$, добиваме прстен со бараната особина.

Забелешки. 1. Давање директен доказ на особината 4° не е така едноставно, што се гледа и од следната негова скица. Прво се определува прстенот F што е слободно генериран од G. Потоа се формира идеалот I во F што е генериран од подмножеството на F:

$$\{x + y - xy - x\mathrm{o}y \mid x, y \in G\}$$

и се означува со R фактор прстенот F/I. Наредната етапа би била да се докаже дека пресликувањето $a \to I + a$ од G во P/I е инјекција, но ние не сме успеале тоа да го направиме.

2. Ако $R(+, .)$ е прстен, и ако во R определиме операција „*" со: „." $x^* y = x + y + xy$, тогаш пак добиваме квазипрстен, што лесно се проверува. Од ова следува и тоа дека секој групоид $G(^*)$ може да се смести во прстен $R(+, .)$, така што $x^* y = x + y + xy$, за секои $x, y \in G$. Имено, прво $G(^*)$ се сместува во квазипрстен $R(+, ^*)$, а потоа се дефинира во R операција „." со: $xy = x * y - x - y$ и се добива прстен со бараната особина.

G. Čupona

ON QUASIRINGS

Summary

An algebra $R(+,o)$ is said to be a quasiring iff:

(i) $R(+)$ is an abelian group;

(ii) $(\forall x, y, z \in R)\ x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z - x$

$$(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z - z.$$

The following results are shown in this note.

1. If $G(\circ)$ is a (commutative, associative) groupoid, then there is a (commutative, associative) quasirng $R(+,\circ)$ such that $G(\circ)$ is a subgroupoid of $R(\circ)$.

2. If $G(o)$ is a (commutative, associative) groupoid, then there is a (commutative, associative) ring $R(+,\cdot)$ such that $G \subseteq R$, and $(\forall x, y \in G)\ x \circ y = x+y-xy$.