MATEMATIČKA BIBLIOTEKA, sv. 39 (1969), 135—149.

Dr *Gjorgi Čupona*

FINITARNE ASOCIJATIVNE OPERACIJE

0. Uvod. Cilj ovog članka je da ukaže na jedan vid uopštenja pojma polugrupe i grupe, koje se sastoji u tome što se umesto sa binarnim, radi sa proizvoljnim finitarnim operacijama. Pri tome se dokazuje (stav 4.2) da se svaka struktura ovog oblika može dobiti od odgovarajuće binarne strukture.

Nadamo se da je materijal koji se ovde prikazuje pristupačan studentima prve godine prirodno-matematičkih i tehničkih fakulteta, a i srednjoškolcima koji imaju izvesna predznanja iz teorije skupova. Rukovodeći se time, a i zbog ograničenog prostora, u ovom radu se prikazuju samo najelementarnija svojstva stuktura koje su predmet izučavanja. U poslednjem odeljku dat je izvestan broj zadataka koji su podeljeni na tri dela. U prvom delu (8.1 — 8.10) nalaze se zadaci lakše prirode; u drugom delu (8.11 — 8.16), u obliku zadataka, navedeno je još nekoliko stavova o finitarnim operacijama, a pri tome spominje se i literatura gde se može naći detaljan dokaz odgovarajućeg stava; i na kraju, u trećem delu (8.17 — 8.20), formulisano je nekoliko pitanja na koja, bar autoru ovog članka, nisu poznati odgovori.

Smatramo korisnim da navedemo još neke primedbe. Početak razvitka teorije grupa je u tesnoj vezi sa teorijom algebarskih jednačina. U prošlom veku su proučavane uglavnom grupe permutacija. Početkom ovog veka počinje intenzivno da se razvija apstraktna teorija grupa, koja utiče i na ostale algebarske discipline. Teorija grupa ima višestruke primene u matematici i teoretskoj fizici. Pojam polugrupe, iako opštiji od pojma grupe, javlja se tek u ovom veku, a i sam naziv „polugrupa" je u vezi sa tim što se ovaj pojam dobija oslabljenjem sistema aksioma pojma grupe. Opšta teorija polugrupa nalazi svoju primenu specijalno u geometriji, iako ne u takvom obimu kao teorija grupa.

Prvi sistematski prikaz n-grupa dao je DÖRNTE u radu [**6**], a iscrpnije je to uradio POST u svom radu [**10**]. U ovim radovima pojavljuje se i pojam n-polugrupe. Ipak, za teoriju n-polugrupa i n-grupa, može se reći, da su tek u začetku.

Literatura koja je navedena na kraju rada nije iscrpna. Smatrali smo samo da je neophodno navesti bar dve monografije iz opšte algebre ([**1**], [**9**]), i nekoliko radova iz teorije n-polugrupa i n-grupa, koji su u vezi sa materijalom iznetim u ovom prikazu.

1. n-grupoidi. Neka je S neprazan skup i neka svakom nizu elemenata $x_0, x_1, \ldots, x_n$ iz S pridružimo jednoznačno određeni element y iz istog skupa S. U tom slučaju pisaćemo:

$$(1.1) \qquad y = (x_0 x_1 \cdots x_n).$$

i kazaćemo da je u datom skupu S definisana operacija dužine $n+1$, ili da je u skupu S izgrađena struktura n-grupoida. (Radi jednostavnijeg izražavanja, sam skup S nazivaće se n-grupoidom). Za $n=1$, umesto 1-grupoid kažemo prosto grupoid, a u ovom slučaju, umesto (xy) obično se piše $x\bigcirc y$, $x*y$, $x+y$, $xy, \ldots$ Iznećemo nekoliko primera.

1.1) Ako je S skup svih celih brojeva i ako stavimo:

$$(xy) = x\cdot y, \quad x+y, \quad 2xy, \quad x-y,$$

izgradićemo četiri srukture grupoida u S. Ali, u odnosu na operaciju deljenja S nije grupoid, jer, na primer, $1:2$ ne pripada skupu S.

1.2) Neka je S skup svih neparnih celih brojeva. Ako stavimo $(xyz) = x+y+z$, dobijamo 2-grupoid. Jasno je da isti skup S nije grupoid u odnosu na običnu operaciju sabiranje, budući da je zbir dva neparna cela broja paran.

Sukcesivnom primenom operacije, u jednom n-grupoidu mogu se dobiti, da ih tako nazovemo, složeni proizvodi. Na primer, takav jedan proizvod je sledeći:

$$(1.2) \qquad (x_0 x_1 (x_2 \cdots x_{n+1}) (x_{n+2} \cdots x_{2n+2}) x_{2n+3} \cdots x_{3n}).$$

Preciznije, ovi proizvodi se definišu na sledeći način:

(i) $\qquad (\Pi x) = x;$

(ii) ako su $(\Pi^0 x_{00} \cdots x_{0k_0})$, $(\Pi' x_{10} \cdots x_{1k_1}), \ldots, (\Pi^{(n)} x_{n0} \cdots x_{nk_n})$

već određeni proizvodi, onda se definiše novi proizvod

$$(\Pi\, x_{00} \cdots x_{0 k_0} \cdots x_{n k_n})$$

pomoću:

(1.3) $(\Pi\, x_{00} \cdots x_{n k_n}) = ((\Pi^0 x_{00} \cdots x_{0 k_0}) \cdots (\Pi^{(n)} x_{n0} \cdots x_{n k_n}))$.

Prema tome:

(1.4) $$(\Pi\, x_0 x_1 \cdots x_n) = (x_0 x_1 \cdots x_n).$$

Dužina $d\Pi$ proizvoda Π određuje se sa:

(1.5) $$d(\Pi x) = 1, \quad d\Pi = d\Pi^0 + d\Pi' + \cdots + d\Pi^{(n)},$$

tj. $d\Pi$ je jednako broju „faktora" koji se javljaju u proizvodu. (Uočimo da proizvod nije jednoznačno određen svojom dužinom.)

Indukcijom je lako dokazati sledeći stav:

1.1. *U jednom n-grupoidu mogu se formirati proizvodi dužine* $kn+1$ *za svaki prirodan broj* k.

2. n-polugrupa. Ako je operacija n-grupoida S asocijativna, onda se ovaj n-grupoid naziva n-polugrupom. Preciznije, n-grupoid S naziva se n-polugrupom, ako je, za svako $i = 2, 3, \ldots, n$ i proizvoljne elemente $x_0, x_1, \ldots, x_{2n} \in S$, ispunjena jednakost:

(2.1) $$((x_0 \cdots x_n)\, x_{n+1} \cdots x_{2n}) = (x_0 \cdots x_{i-1} (x_i \cdots x_{i+n}) \cdots x_{2n}).$$

Za $n = 1$, i u ovom slučaju, umesto 1-polugrupa kaže se prosto polugrupa. Svi grupoidi primera 1.1), osim poslednjeg su polugrupe. U 1.2) imamo primer 2-polugrupe.

U prethodnom delu smo spomenuli da se u jednom n-grupoidu mogu formirati razni proizvodi iste dužine. Ako se posmatra (2.1), može se uočiti da se u definiciji pojma n-polugrupe traži da svi proizvodi $(\Pi\, x_0 x_1 \cdots x_{2n})$ budu jednaki. Dokazaćemo sada da važi i sledeći opštiji stav:

2.1. *Ako je S n-polugrupa, onda je proizvod* $(\Pi\, x_0 x_1 \cdots x_{kn})$ *jednoznačno određen nizom* $x_0, x_1, \ldots, x_{kn} \in S$. *(Drugim rečima u složenim proizvodima, kod n-polugrupa, nisu bitni rasporedi zagrada.)*

Dokaz. Uvedimo oznaku:

(2.2) $$(x)_0 = x, \quad (x_0 \cdots x_{(k+1)n})_{k+1} = ((x_0 \cdots x_n)\, x_{n+1} \cdots x_{(k+1)n})_k.$$

Prema tome imamo:

(2.3) $$(x_0 x_1 \cdots x_n)_1 = (x_0 x_1 \cdots x_n).$$

Neka je $(\Pi x_0 x_1 \cdots x_{kn})$ proizvoljni proizvod dužine $kn+1$. Za $k=1$, prema (1.4), imamo

$$(\Pi x_0 \cdots x_n) = (x_0 \cdots x_n) = (x_0 \cdots x_n)_1,$$

a za $k=2$, prema (2.1)

$$(\Pi x_0 x_1 \cdots x_{2n}) = (x_0 x_1 \cdots x_{2n})_2.$$

Pretpostavimo da je

$$(\Pi x_0 x_1 \cdots x_{mn}) = (x_0 x_1 \cdots x_{mn})_m \tag{2.4}$$

za $m<k$, pri čemu je $k>2$. Imajući u vidu (1.3) i (2.1), lako se dokazuje da je jednakost (2.3) ispunjena i za $m=k$ čime je kompletiran dokaz stava.

U daljem izlaganju pisaćemo i $(x_0 x_1 \cdots x_{kn})$ umesto

$$(x_0 x_1 \cdots x_{kn})_k.$$

Kao posledica stava 2.1 dobija sa i sledeći stav:

2.2. *Neka je S polugrupa čija je operacija označena sa „○“. Ako se definiše operacija dužine $n+1$ sa:*

$$(x_0 x_1 \cdots x_n) = x_0 \circ x_1 \circ \cdots \circ x_n \tag{2.5}$$

onda S postaje n-polugrupa.

3. Slobodne *n*-polugrupe. Neka je A neprazan skup, n prirodan broj i neka je F skup svih konačnih nizova

$$a_0 a_1 \cdots a_{kn}, \tag{3.1}$$

gde je $k=0, 1, 2, \ldots$ i $a_\nu \in A$. Pri tome svaki elemenat a_ν iz A, kao jednočlani niz, pripada skupu F. Osim toga:

$$a_0 a_1 \cdots a_{kn} = a_0' a_1' \cdots a_{kn}' \Leftrightarrow k=n, \quad a_\nu = a_\nu', \tag{3.2}$$

tj. dva niza smatramo jednakim samo ako su identično jednaka. Neka je $u_0, u_1, \ldots, u_n$ niz elemenata iz F i neka:

$$u_0 = a_{00} \cdots a_{0,k_0 \cdot n}, \ldots, u_n = a_{n0} \cdots a_{n,k_n \cdot n}. \tag{3.3}$$

Ako stavimo:

$$(u_0 u_1 \cdots u_n) = a_{00} \cdots a_{0,k_0 n} \cdots a_{n,k_n \cdot n} \tag{3.4}$$

dobijamo operaciju dužine $n+1$ u skupu F. Uočimo da je ova operacija u stvari obična superpozicija nizova.

Skoro je očigledna tačnost sledećeg stava:

3.1. *F je n-polugrupa u odnosu na operaciju* (3.4), *tj. u odnosu na operaciju superpozicija nizova.* (*Ovu n-polugrupu nazivamo slobodnom i kažemo da je ona slobodno generirana skupom A.*)

U slučaju $n=1$, dobijamo sledeći specijalni pojam slobodne polugrupe:

3.2. *Ako je A neprazan skup, onda se slobodna polugrupa F generirana ovim skupom sastoji iz svih konačnih nizova $a_1 a_2 \cdots a_k$, čiji su članovi elementi iz A, i pri tome:*

$$a_1 a_2 \cdots a_k \circ a_1' a_2' \cdots a_s' = a_1 a_2 \cdots a_k a_1' \ldots a_s'. \tag{3.5}$$

4. Pokrivajuće polugrupe. Osobina 2.2. nam sugerira pitanje da li se svaka n-polugrupa S može dobiti od polugrupe, tako da je ispunjena jednakost (2.5). Na konkretnom primeru uverićemo se da je odgovor negativan. Naime, to sledi iz sledećeg stava:

4.1. *Ako je S 2-polugrupa neparnih celih brojeva gde je operacija određena sa $(xyz)=x+y+z$, onda se ne može izgraditi struktura polugrupe $(xy)=x\circ y$, na skupu S, tako da je $(xyz)=x\circ y\circ z$.*

Dokaz. Pretpostavimo da takva polugrupa postoji i posmatrajmo „proizvod" $w=x\circ y\circ x\circ y\circ z$. Imajući u vidu asocijativnost i jednakost $(x_1 x_2 x_3)=x_1+x_2+x_3$, dobijamo:

$$\begin{aligned} w &= (x\circ y\circ x)\circ y\circ z=(x\circ y\circ x)+y+z=2(x+y)+z \\ &= (x\circ y)\circ(x\circ y)\circ z=x\circ y+x\circ y+z=2(x\circ y)+z, \end{aligned}$$

tj. $x+y=x\circ y$, što je nemoguće budući da $x+y$ ne pripada skupu S. Prema tome, tačno je da se na skupu S ne može definirati operacija „$\circ$" traženog oblika.

Sada ćemo uvesti pojam pokrivajuće polugrupe. Naime, polugrupa T naziva se pokrivač za n-polugrupu S ako je: (i) $S\subseteq T$; (ii) svaki elemenat $t\in T$ proizvod oblika $t=s_1 s_2\cdots s_k$, gde su $s_1, \ldots, s_k$ elementi skupa S, i (iii) ispunjena jednakost (2.5) za sve $x_0, x_1, \ldots, x_n \in S$.

Polugrupa celih brojeva, u odnosu na operaciju sabiranje, je zapravo pokrivač (aditivne) 2-polugrupe neparnih celih brojeva.

Osnovni rezultat ovog rada je naredni stav, koji ćemo dokazati u odeljku **6**.

4.2. *Svaka n-polugrupa S može se pokriti polugrupom.*

Nezavisno od ovog rezultata, nadamo se da čitaocu neće biti teško dokazati sledeći stav.

4.3. *Ako je S n-polugrupa slobodno generirana skupom A, a F polugrupa slobodno generirana istim skupom A, onda je F pokrivač za S.*

5. Kongruencije. Ovde ćemo definisati nekoliko pojmova, a i navesti nekoliko stavova u vezi sa njima, koje ćemo koristiti pri dokazivanju stava 4.2.

Neka je S dati skup i S^2 neka označava skup svih uređenih parova (x, y) elemenata iz S; pri tome

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x', \ y = y'.\text{[1]}$$

Svaki podskup α skupa S^2 naziva se (binarna) relacija u skupu S. Ako $(x, y) \in \alpha$, kazaćemo da je x u relaciji α sa y i pisaćemo $x\alpha y$.

Relacija α naziva se: (i) refleksivna, (ii) simetrična, (iii) tranzitivna, ako respektivno:

(i) $x\alpha x$ za svako $x \in S$,

(ii) $x\alpha y \Rightarrow y\alpha x$,

(iii) $x\alpha y \,\&\, y\alpha z \Rightarrow x\alpha z$.

Relacija α koja zadovoljava sva tri navedena uslova naziva se relacija ekvivalentnosti u skupu S.

Čitaocu prepuštamo da dokaže naredna dva stava.

5.1. *Neka je α proizvoljna relacija u skupu S i neka su relacije β i γ određene sa*:

$$x\beta y \Leftrightarrow x\alpha y \vee y\alpha x \vee x = y \tag{5.1}$$

$$x\gamma y \Leftrightarrow (\exists u_1, u_2, \ldots, u_k \in S)\, x\beta u_1, u_1\beta u_2, \ldots, u_k\beta y. \tag{5.2}$$

Novodobijene relacije β i γ imaju sledeća svojstva: (i) β *je refleksivna i simetrična*, (ii) γ *je relacija ekvivalentnosti.*

---

[1] Znaci $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\&$, $\exists$ upotrebljavaju se u uobičajenom smislu, tj. umesto izraza: „iz ... sledi", „ako i samo ako", „i", „ili", „postoji ... tako da ..." — respektivno: pri tome je sud $A \vee B$ istinit, ako je bar jedan od sudova A, B istinit.

5.2. *Ako je α relacija ekvivalentnosti u skupu S onda se skup S može podeliti na familiju podskupova $\{S_i\}$ tako da:* (i) *svaki elemenat $x \in S$ pripada jednom i samo jednom podskupu koji je član te familije,* (ii) *$x\alpha y$ ako i samo ako i x i y pripadaju istom članu te familije. (U tom slučaju ako $x \in S$ sa x^α označavamo odgovarajući podskup koji sadrži x i kažemo da je to klasa ekvivalentnosti za α. Sa S/α označavamo skup čiji su elementi sve klase ekvivalentnosti.)*

Ilustrujmo to na jednom primeru.

5.1) Neka je S skup celih brojeva i neka: $x\alpha y \Leftrightarrow x-y$ se deli bez ostatka brojem 3.

Lako je proveriti da je α relacija ekvivalentnosti, i da postoje tri klase ove ekvivalentnosti, a to su naime 0_3, 1_3, 2_3, određene sa:

$$0_3 = \{3k;\ k \text{ je ceo broj}\},\quad 1_3 = \{3k+1;\ k \text{ je ceo broj}\},$$

$$2_3 = \{3k+2;\ k \text{ je ceo broj}\}.$$

Skup S/α sastoji se, prema tome, iz tri elementa $S/\alpha = \{0_3, 1_3, 2_3\}$.

Pretpostavimo sada da je S polugrupa, i da je α relacija ekvivalentnosti u skupu S. Ako je, osim toga, ispunjen i uslov:

$$x\alpha y \,\&\, u\alpha v \Rightarrow x \bigcirc u \;\alpha\; y \bigcirc v, \tag{5.3}$$

onda kažemo da je α kongruencija polugrupe S.

Prepuštamo čitaocu da dokaže i sledeći stav.

5.3. *Neka je S polugrupa i neka je α relacija u skupu S. Ako α zadovoljava* (5.3), *onda je relacija γ, određena sa* (5.2), *kongruencija polugrupe S.*

Dokazaćemo sledeći stav:

5.4. *Neka je α kongruencija polugrupe S i definišimo operaciju u skupu S/α pomoću:*

$$x \bigcirc y = z \text{ u } S \Leftrightarrow x^\alpha \bigcirc y^\alpha = z^\alpha \text{ u } S/\alpha. \tag{5.4}$$

Onda je S/α polugrupa u odnosu na tako definisanu operaciju.

Dokaz. Uočimo prvo da je $x_1{}^\alpha = x_2{}^\alpha \Leftrightarrow x_1 \alpha x_2$. Neka $x_1{}^\alpha = x_2{}^\alpha$, $y_1{}^\alpha = y_2{}^\alpha$ i neka $x_1 \bigcirc y_1 = z_1$, $x_2 \bigcirc y_2 = z_2$. Onda imamo $x_1 \alpha x_2$, $y_1 \alpha y_2$, pa i $x_1 \bigcirc y_1 \;\alpha\; x_2 \bigcirc y_2$, tj. $z_1 \alpha z_2$, odnosno $z_1{}^\alpha = z_2{}^\alpha$ Time smo dokazali da proizvod $x^a \bigcirc y^a$ ne zavisi od x i y, već od klasa x^a, y^a. Koristeći asocijativnost operacije „$\bigcirc$" u polugrupi S, dobijamo:

$$\begin{aligned}(u^a \bigcirc v^a) \bigcirc w^a &= (u \bigcirc v)^a \bigcirc w^a = ((u \bigcirc v) \bigcirc w)^a \\ &= (u \bigcirc (v \bigcirc w))^a = u^a \bigcirc (v \bigcirc w)^a \\ &= u^a \bigcirc (v^a \bigcirc w^a),\end{aligned}$$

tj. da je i S/a polugrupa.

Relacija a određena u primeru 5.1) je primer kongruencije u polugrupi celih brojeva u odnosu na operaciju množenja, a i sabiranja. Odgovarajuće „faktor-polugrupe" S/a, mogu se odrediti pomoću sledećih tablica:

$+$	0_3	1_3	2_3
0_3	0_3	1_3	2_3
1_3	1_3	2_3	0_3
2_3	2_3	0_3	1_3

$\cdot$	0_3	1_3	2_3
0_3	0_3	0_3	0_3
1_3	0_3	1_3	2_3
2_3	0_3	2_3	1_3

(Smatramo da će čitaocu biti lako da protumači ove tablice.)

6. ***Dokaz stava* 4.2.** Neka je S n-polugrupa, i neka je F polugrupa slobodno generirana skupom S, tj. F se sastoji od svih konačnih nizova $x_1 x_2 \cdots x_k$ gde su $x_1, x_2, \ldots, x_k$ elementi iz S; osim toga operacija u polugrupi F je superpozicija nizova. Umesto $u \bigcirc v$ pisaćemo uv (videti 3.2).

Odredimo u F relaciju a pomoću:

$$(6.1)\qquad \begin{aligned} u\,a\,v \iff u &= a_1 \cdots a_{i-1}\, a_i\, a_{i+1} \cdots a_k, \\ v &= a_1 \cdots a_{i-1}\, b_0 \cdots b_n\, a_{i+1} \cdots a_k, \end{aligned}$$

gde je $a_i = (b_0 b_1 \cdots b_n)$ u n-polugrupi S.

Jasno je da relacija a zadovoljava uslov (5.1), tj. da

$$(6.2)\qquad u\,a\,v \Rightarrow wu\,a\,wv \;\&\; uw\,a\,vw.$$

Neka su β i γ relacije određene pomoću a sa (5.1) i (5.2). Prema stavu 5.3, γ je kongruencija u polugrupi F.

Neka je a elemenat skupa S i neka $a\,a\,u$. Prema (6.1) u ima oblik $u = b_0 b_1 \cdots b_n$ gde je $a = (b_0 \cdots b_n)$ u S. Ako je sada $u\,a\,v$, onda $v = b_0 \cdots b_{i-1}\, c_0 \cdots c_n\, b_{i+1} \cdots b_n$, gde je $b_i = (c_0 c_1 \cdots c_n)$ u S, pa znači

$a=(b_0\cdots b_{i-1}(c_0\cdots c_n)b_{i+1}\cdots b_n)=(b_0\cdots b_{i-1}c_0\cdots c_n b_{i+1}\cdots b_n)$.
Produžujući ovaj postupak, dobijamo:

$$(6.2') \qquad a\in S,\ a\,\alpha\,u_1,\ u_1\,\alpha\,u_2,\ \ldots,\ u_{k-1}\,\alpha\,u_k\ \Rightarrow\ u_k=a_0\cdots a_{kn},$$

gde je $a=(a_0 a_1\cdots a_{kn})$ u S.

Iz (6.2'), ako se ima u vidu i način na koji je definisana relacija γ, sledi:

$$(6.3) \qquad a,b\in S\ \&\ a\gamma b\ \Rightarrow\ a=b,$$

tj.

$$(6.3') \qquad a,b\in S\ \&\ a^\gamma=b^\gamma\ \Rightarrow\ a=b.$$

Ovaj rezultat nam dozvoljava da smatramo da je skup S podskup skupa $T=F/\alpha$. Naime, ako je a elemenat iz skupa S, onda ćemo smatrati da je tačna jednakost $a=a^\alpha$. Iz (6.3') sledi da nije moguća jednakost $a^\gamma=b^\gamma$ za $a\neq b$. (Preciznije bi bilo formirati skup T na taj način što bi se svaka klasa a^γ, gde je a elemenat iz S, zamenila sa elementom a.)

Neka $a_0, a_1, \ldots, a_n\in S$ i $b=(a_0 a_1\cdots a_n)$ u n-polugrupi S. U tom slučaju, imaćemo:

$$a_0\circ a_1\circ\cdots\circ a_n=a_0{}^\gamma\circ a_1{}^\gamma\circ\cdots\circ a_n{}^\gamma=(a_0\circ a_1\circ\cdots a_n)^\gamma=b^\gamma$$
$$=b=(a_0 a_1\cdots a_n),$$

pa znači da je ispunjena jednakost (2.5).

Osim toga ako $u^\gamma\in F/\gamma$, i $u=a_1 a_2\cdots a_k$, onda je

$$u^\gamma=a_1{}^\gamma\circ a_2{}^\gamma\circ\cdots\circ a_k{}^\gamma=a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_k,$$

tj. svaki elemenat $u^\gamma\in T$ može se predstaviti kao proizvod elemenata iz S. Time smo dokazali da je polugrupa T pokrivač n-polugrupe S, tj. kompletirali dokaz stava 4.2.

Drugi dokaz istog stava dat je u radu [**2**].

7. n-grupe. n-polugrupa S naziva se n-grupom ako za svaki niz elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ iz S postoje elementi $x, y\in S$ takvi da

$$(7.1) \qquad (xa_1 a_2\cdots a_n)=b=(a_1 a_2\cdots a_n y).$$

Za $n=1$ kaže se prosto grupa. Prema tome, polugrupa S je grupa ako za svaki par elemenata $a, b \in S$ postoji par elemenata $x, y \in S$ takav da

$$xa = ay = b. \tag{7.1'}$$

Dokazaćemo ovde samo jedan stav koji je u vezi sa n-grupama.

7.1. *Pokrivač svake n-grupe je grupa.*

Dokaz. Neka je S n-grupa. Prema stavu 4.2, postoji pokrivajuća polugrupa T, tj. takva polugrupa da je ispunjena jednakost (2.5), a osim toga svaki elemenat $t \in T$ je oblika $t = a_1 a_2 \cdots a_k$, gde su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elementi iz S. Treba dokazati da je T grupa.

Neka je t, u par elemenata iz T i neka

$$t = a_1 a_2 \cdots a_i, \quad u = b_1 b_2 \cdots b_j \quad (a_\nu, b_\lambda \in S). \tag{7.2}$$

Izaberimo proizvoljno elemente $c_1, c_2, \ldots, c_{n-i} \in S$. Kako je S po pretpostavci n-grupa, postoji elemenat $d \in S$ takav da

$$(dc_1 \cdots c_{n-i} a_1 \cdots a_i) = b \quad \text{u} \quad S,$$

tj.

$$dc_1 \cdots c_{n-i} a_1 \cdots a_i = b \quad \text{u} \quad T.$$

Stavljajući:

$$x = dc_1 c_2 \cdots c_{n-i} \tag{7.3}$$

dobijamo $xt = u$. Slično se pokazuje egzistencija elementa y takvog da $ty = u$. Time je kompletiran dokaz stava.

Radi potpunosti, formulisaćemo jedan stav o grupama.

7.2. *Polugrupa S je grupa, ako i samo ako postoji elemenat $e \in S$ takav da je*

$$x = ex = xe, \text{ za svako } x \in S \tag{7.4}$$

i ako za svako $x \in S$ postoji elemenat $x^{-1} \in S$ takav da

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e. \tag{7.5}$$

(Elemenat e naziva se neutralni, a za x^{-1} kaže se da je inverzija elementa x.)

8. Zadaci. Kao što smo pomenuli i u uvodu, zadaci su podeljeni u tri grupe prema težini. Čitaocu preporučujemo da svakako pokuša da reši zadatke iz prve grupe, a onome koji pokazuje specijalan interes prema algebri da se ne ograniči samo na ovu grupu.

A. 8.1. Neka je S data polugrupa i a dati elemenat iz S. Dokazati da, ako je definisana operacija dužine $n+1$ pomoću:

$$(x_0\, x_1 \cdots x_n) = x_0\, a x_1 \cdots x_n, \tag{8.1}$$

onda je identički ispunjena jednakost:

$$((x_0 \cdots x_n)\, x_{n+1} \cdots x_{2n}) = (x_0 \cdots x_{n-1}\,(x_n \cdots x_{2n})). \tag{8.2}$$

8.2. Neka je S grupoid čija je operacija označena sa $*$ i neka je u ovom grupoidu ispunjen sledeći zakon entropije

$$(x * y) * (u * v) = (x * u) * (y * v). \tag{8.3}$$

Odredimo operaciju dužine $n+1$:

$$(x_0\, x_1 \cdots x_n) = (\cdots((x_0 * x_1) * x_2) \cdots) * x_n. \tag{8.4}$$

Dokazati da je u dobijenom n-grupoidu ispunjen sledeći uopšteni zakon entropije

$$\begin{aligned}((x_{00}\, x_{01} \cdots x_{0n})\,(x_{10}\, x_{11} \cdots x_{1n}) \cdots (x_{n0}\, x_{n1} \cdots x_{nn}))\\ = ((x_{00}\, x_{10} \cdots x_{n0})\,(x_{01}\, x_{11} \cdots x_{n1}) \cdots (x_{0n}\, x_{1n} \cdots x_{nn})).\end{aligned} \tag{8.5}$$

8.3. Neka je u grupoidu S ispunjen distributivni zakon:

$$x * (y * z) = (x * y) * (x * z), \tag{8.6}$$

i neka je određen n-grupoid sa (8.4). Dokazati da je ispunjen sledeći uopšteni distributivni zakon:

$$\begin{aligned}(x_1 \cdots x_n\,(y_0\, y_1 \cdots y_n))\\ = ((x_1 \cdots x_n\, y_0)\,(x_1 \cdots x_n\, y_1) \cdots (x_1 \cdots x_n\, y_n)).\end{aligned} \tag{8.7}$$

8.4. n-polugrupa S naziva se komutativnom ako nije bitan raspored faktora $x_0, x_1, \ldots, x_n$ u proizvodu $(x_0\, x_1 \cdots x_n)$, tj. ako je za svaku permutaciju $i_0, i_1, \ldots, i_n$ brojeva $0, 1, \ldots, n$, ispunjena jednakost

$$(x_0\, x_1 \cdots x_n) = (x_{i_0}\, x_{i_1} \cdots x_{i_n}). \tag{8.8}$$

Dokazati da je u komutativnoj n-polugrupi S, za svaku permutaciju $j_0, j_1, \ldots, j_{kn}$ brojeva $0, 1, \ldots, kn$, ispunjena jednakost

$$(x_0\, x_1 \cdots x_{kn}) = (x_{j_0}\, x_{j_1} \cdots x_{j_{kn}}). \tag{8.9}$$

8.5. Neka je S komutativna n-polugrupa i neka za svaki elemenat $a \in S$ postoje elementi $a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$ takvi da:

$$(a_0 a_1 \cdots a_n) = a. \tag{8.10}$$

Dokazati da je svaki pokrivač ove n-polugrupe komutativna polugrupa.

8.6. Neka je $S = \{3, 5, 7, 9, \ldots\}$ skup neparnih prirodnih brojeva $\geqslant 3$ i neka $(xyz) = x + y + z$. Dokazati da je pokrivač komutativne 2-polugrupe S dobijen u dokazu stava 4.2 nekomutativna polugrupa.

Uputstvo. Dokazati da je $3 \bigcirc 5 \neq 5 \bigcirc 3$.

8.7. Neka je S n-polugrupa, a e elemenat iz S takav da su za svako $x \in S$ ispunjene jednakosti:

$$(xee \cdots e) = (exe \cdots e) = \cdots = (ee \cdots ex) = x. \tag{8.11}$$

Dokazati da, ako je binarna operacija „$\bigcirc$" definisana pomoću

$$x \bigcirc y = (xyee \cdots e), \tag{8.12}$$

onda je $S(\bigcirc)$ polugrupa i pri tome je ispunjena jednakost (2.5). Ako je, osim toga, S n-grupa, onda je i $S(\bigcirc)$ grupa.

Uputstvo. Prethodno dokazati da su ispunjene jednakosti:

$$(ex_1 x_2 \cdots x_n) = (x_1 e x_2 \cdots x_n) = \cdots = (x_1 x_2 \cdots x_n e). \tag{8.13}$$

8.8. Kažemo da u n-polugrupi S važi zakon skraćivanja, ako za svako $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ imamo:

$$(a_1 \cdots a_i x a_{i+1} \cdots a_n) = (a_1 \cdots a_i y a_{i+1} \cdots a_n) \Rightarrow x = y. \tag{8.14}$$

Dokazati da ako je uslov (8.14) ispunjen za $i = 0$ i $i = n$, onda je on ispunjen i za svako i; tj. da tada u n-polugrupi važi zakon skraćivanja. Isto tako, dokazati da ako je neki pokrivač T jedne n-polugrupe S, polugrupa sa skraćivanjem, onda i sama n-polugrupa ima to svojstvo.

8.9. Na konkretnom primeru dokazati da egzistencija neutralnog elementa nije posledica aksioma n-grupa. (Da li je ovo u suprotnosti sa stavom 7.2.)

8.10. Dokazati stavove: 1.1, 3.1, 3.2, 4.3, 5.1, 5.2, 5.3 i 7.2.

B. 8.11. Dokazati da svaka komutativna n-polugrupa ima komutativni pokrivač ([**4**], str. 7).

8.12. Dokazati da u nekom pokrivaču T n-polugrupe S važi zakon skraćivanja, ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(i) U n-polugrupi S važi zakon skraćivanja;

(ii) Ako je ispunjena jednakost

$$(a_1 \cdots a_{n-i} x_0 \cdots x_i) = (a_1 \cdots a_{n-i} y_0 \cdots y_i), \tag{8.15}$$

odnosno

$$(x_0 \cdots x_i\, a_1 \cdots a_{n-i}) = (y_0 \cdots y_i\, a_1 \cdots a_{n-i}) \tag{8.16}$$

za neki fiksni niz elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_{n-i} \in S$, onda je odgovarajuća jednakost ispunjena ako se taj niz zameni proizvoljnim nizom elemenata $u_1, u_2, \ldots, u_{n-i} \in S$ ([**4**], str. 13).

8.13. Neka je S n-grupoid sa neutralnim elementom e[1] koji zadovoljava jednakosti (8.13), i neka postoje dva različita proizvoda Π', Π'' takva da je identički ispunjena jednakost:

$$(\Pi' x_0 x_1 \cdots x_{kn}) = (\Pi'' x_0 x_1 \cdots x_{kn}), \quad k \geqslant 2. \tag{8.17}$$

Dokazati da je n-grupoid S i n-polugrupa ([**13**], str. 31).

8.14. Neka je S n-grupoid sa neutralnim elementom i neka je identički ispunjena jednakost:

$$(x_0 \cdots x_{i-1} (x_i \cdots x_{i+n}) \cdots x_{2n}) = (x_0 \cdots x_{i+j-1} (x_{i+j} \cdots) \cdots x_{2n}), \tag{8.18}$$

gde je $(i, j, n) = 1$.[2] Dokazati da je n-grupoid S i n-polugrupa ([**12**], str. 6).

8.15. Neka je S n-grupoid koji identički zadovoljava jednakost (8.2). Dokazati da postoji polugrupa T takva da je $S \subseteq T$ i pri tome je ispunjena jednakost (8.1) za sve elemente $x_0, \ldots, x_n \in S$, gde je a fiksni elemenat iz T ([**5**], str. 105).

8.16. Neka su u skupu S definisane dve operacije $(x_0 x_1 \cdots x_n)$ i $[y_0 y_1 \cdots y_m]$, i neka su ispunjeni sledeći uslovi:

(i) S ( ) je komutativna n-grupa;

(ii) S [ ] je m-polugrupa;

---

[1] tj. elementom koji zadovoljava jednakosti (8.11), za svako $x \in S$.

[2] tj. broj 1 je najveći zajednički delilac brojeva i, j, n.

(iii) Operacija [ ] je distributivna prema ( ), tj. za svako $i=0, 1, \ldots, n$ je identički ispunjena jednakost:

$$(8.19)\ [x_1 \cdots x_i (y_0 y_1 \cdots y_m) x_{i+1} \cdots x_n]$$
$$=([x_1 \cdots x_i y_0 x_{i+1} \cdots x_n],\ [x_1 \cdots x_i y_1 x_{i+1} \cdots x_n], \ldots,$$
$$[x_1 \cdots x_i y_m x_{i+1} \cdots x_n]).$$

U tom slučaju kažemo da je S $[m, n]$ — prsten. Ako je $m=n=1$, onda se S naziva prsten, i u tom slučaju operacije se označavaju sa:

$$(8.20) \qquad (xy)=x+y, \quad [xy]=xy.$$

Dokazati da ako je S prsten (tj. [1,1] — prsten), i ako se operacije ( ) i [ ] definišu sa:

$$(8.21) \quad (x_0 x_1 \cdots x_n)=x_0+x_1+\cdots+x_n,\ [y_0 y_1 \cdots y_m]=y_0 y_1 \cdots y_m,$$

onda se dobija $[m, n]$ — prsten. I obratno, ako je S $[m, n]$ — prsten, onda postoji prsten T takav da je $S \subseteq T$ i pri tome su ispunjene jednakosti (8.21) za sve $x_\nu, y_\lambda \in S$ ([3], str. 6).

C.8.17. Kakve uslove treba da zadovoljava n-polugrupa S tako da u svakom njenom pokrivaču važi zakon skraćivanja?

8.18. Neka je S n-grupoid koji zadovoljava identitet entropije (8.5). Da li postoji grupoid T koji zadovoljava identitet (8.3), takav da $S \subseteq T$ i pri tome (za $x_\nu \in S$) da je ispunjena jednakost (8.4)?

8.19. Odgovoriti na pitanje analogno prethodnim u vezi sa zadatkom 8.3.

8.20. Neka je S n-grupoid sa neutralnim elementom i neka postoje dva različita proizvoda Π', Π'' i permutacija $j_0, j_1, \ldots, j_{kn}$ brojeva $0, 1, \ldots, kn$ tako da je identički zadovoljena jednakost:

$$(8.22) \qquad (\Pi' x_0 x_1 \cdots x_{kn})=(\Pi'' x_{j_0} x_{j_1} \cdots x_{j_{kn}}).$$

U kom se slučaju kao posledica ove jednakosti dobija da je S komutativna n-polugrupa?

LITERATURA

[1] P. M. Cohn, *Universal algebra*, New Vork 1965.

[2] G. Čupona, *Za asocijativnite kongruencii*, Bilt. Društ. mat. fiz. Maked. **13** (1962), 5—12.

[3] G. ČUPONA, *Za $[m, n]$-prstenite*, Bilt. **16** (1965), 5—10.

[4] G. ČUPONA, *Polugrupi generirani od asocijativi*, God. Zborn. Prir. matem. fak. Skopje **15** (1964), 5—25.

[5] G. ČUPONA, *On some primitive classes of universal algebras*, Matem. vesnik **3** (1966), 105—108.

[6] W. DÖRNTE, *Untersuchungen über verallgemeinerten Gruppenbégriff*, Mathem. Zeitsch., **29** (1928), 1—19.

[7] M. HOSSZÚ, *On the explicit form of n-group operations*, Publ. math. **10** (1963), 88—92.

[8] L. M. GLUSKIN, *O pozicionnih operativah*, DAN **157** (1964), 767—770.

[9] A. G. KUROŠ, *Lekcii po obščeĭ algebre*, Moskva 1962.

[10] E. L. POST, *Polyadic groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **48** (1940), 208—350.

[11] J. K. REBANE, *O predstavlenii universal'nih algebr v kommutativnih polugruppah*, Sib, Mat. Žurn. **7** (1966), 878—885.

[12] B. TRPENOVSKI, *Delumno asocijativni n-grupoidi so neutralni elementi*, Bilt. Društ. mat. fiz. Maked. **14** (1963), 5—16.

[13] B. TRPENOVSKI, *Za n-grupoidite so centralni neutralni elementi*, Bilt. **14** (1963), 31—39.

HARDY O „VAŽNIM" TEOREMAMA

„Važna" teorema je teorema koja sadrži „značajne" ideje... Dve stvari su izgleda u svakom slučaju bitne, izvesna *opštost* i izvesna *dubina*...

Značajna matematička ideja, važna matematička teorema, treba da bude „opšta" u nekom smislu kao što je sledeće. Ideja treba da bude sastavni deo raznih matematičkih konstrukcija, kao i da se upotrebljava u dokazivanju mnogih različitih teorema. Teorema treba da bude takva da se, mada dokazana prvi put (kao PITAGORINA teorema[1]) u sasvim specijalnom obliku, može znatno proširiti i da je tipična za čitavu klasu teorema svoje vrste. Relacije koje otkriva dokaz treba da su takve da povezuju mnoge različite matematičke ideje.

Druga osobina koju sam zahtevao od značajne ideje je *dubina*, koju je još teže definisati. Ona ima *nečeg* što je povezano sa *teškoćom*; „dublje" ideje obično su teže da se shvate, ali nije uvek tako. Ideje koje su u osnovi PITAGORINE teoreme i njenih generalizacija su posve duboke, ali ni jedan matematičar sada ne smatra da su one teške. Sa druge strane, teorema može da bude bitno površna ali ipak sasvim teška za dokazivanje (kao što su to mnoge „Diofantove" teoreme, tj. teoreme o rešavanju jednačina u celim brojevima).

[1] Pod Pitagorinom teoremom, koja se gore pominje, podrazumeva se teorema o iracionalnosti broja $\sqrt{2}$.