ЗА ПСЕВДОТЕРНАРИТЕ

А. Самарџиски

1. Како и за проективна рамнина, исто така и за псевдорамнина, познато е дека може да се координатизира со една тернарна структура, наречена псевдотернар (R. Sandler [1]), којашто содржи нула и единица. Во оваа работа *псевдотернар* (G, F) се дефинира без претпоставката за егзистенција на единица и се покажува дека (G, F) индуцира псевдорамнина (**Т.** 1.). Тргнувајќи од псевдотернарот (G, F) може да се конструира псевдотернар (G, F_1) со единица, а псевдорамнините индуцирани од (G, F) и (G, F_1) се изоморфни (**Т. 3.**).

2. Под *псевдорамнина* (R. Sandler [1]) се подразбира едно множество $\mathcal{P}$ од точки и една негова фамилија $\mathcal{Q}$ подмножества, што ќе ги наречеме прави, кои ги задоволуваат следните аксиоми:

I. Постојат две различни точки P_1 и P_2 и две различни прави l_1 и l_2, така што $P_1 \in l_1$, $P_1 \in l_2$ и $P_2 \in l_1$.

II. За секоја точка P од l_1, или од l_2, и секоја друга точка Q, постои, единствена права l, така што $P \in l$ и $Q \in l$.

III. За секоја права l низ P_1, или низ P_2, и секоја друга права m, постои единствена точка P, така што $P \in l$ и $P \in m$.

IV. Постојат барем четири точки, така што било кои три не лежат на иста права.

Со координатизација на една псевдорамнина (R. Sandler [1], *T.* 2.) се добива тернарна структура (G, F) наречена псевдотернар. Имено, *псевдотернар* е едно множество G со барем два елемента 0 и 1, заедно со една тернарна операција F што ги задоволува следните аксиоми:

F 1. $(\forall\, a, c \in G)\ F(0, a, c) = F(a, 0, c) = c;$

F 2. $(\forall\, a \in G)\ F(1, a, 0) = F(a, 1, 0) = a;$

F 3. $(\forall\, a, b, c \in G)\,(\exists!\, z \in G)\ F(a, b, z) = c;$

F 4. $(\forall\, a, b, c \in G;\ a \neq 0)\ (\exists!\, y \in G)\ F(a, y, b) = c;$

F 5. $(\forall\, a, b, c \in G;\ a \neq 0)\ (\exists!\, x \in B)\ F(x, a, b) = c;$

Овде, под *псевдотернар* дразби ќе бараме едно множество G со барем два елемента, од кои едниот ќе го обележиме со 0, заедно со една тернарна операција F, што ги задоволува аксиомите F 1, F 3, F 4 и F 5.

Со наредната теорема се покажува дека над еден вака дефиниран псевдотернар може да се конструира псевдорамнина.

Т.1. *Нека* (G, F) *е псевдотернар и нека* π *се состои од*:

1) *множество на точки*, $\mathcal{P}$:
   - *сите подредени парови* (a, b), $a, b \in G$;
   - *сите симболи* (m) $m \in G$;
   - *специјален симбол* (∞), $\infty \notin G$;
2) *множество на прави*, $\mathcal{Q}$;
   - *сите подредени парови* $[m, b]$, $m, b \in G$;
   - *сите симболи* $[\infty, a]$, $a \in G$;
   - *специјален симбол* l_∞, $l_\infty \notin G$.

Ако релацијата за инцидентност во π *ја дефинираме со*:

$$(\infty) \in l_\infty \qquad (m) \in [m, b]$$
$$(\infty) \in [\infty, a] \qquad (a, b) \in [\infty, a]$$
$$(m) \in l_\infty \qquad (x, y) \in [m, b] <=> y = F(x, m, b)$$

тогаш инцидентната структура $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \in)$ *е псевдорамнина*.

Доказ. Нека е $P_1 \equiv (\infty)$, $P_2 \equiv (0)$, $l_1 \equiv l_\infty$, $l_2 \equiv [\infty, 0]$; тогаш имаме $P_1 \in l_1$, $P_1 \in l_2$, а $P_2 \in l_1$. Значи, задоволена е аксиомата I.

Нека P е точка од правата l_1, а $Q \equiv (a, b)$ е произволна точка; ако, $P \equiv (\infty)$, тогаш $[\infty, a]$ е единствена права што ги содржи точките P и Q; ако пак $P \equiv (m)$, $m \in G$, тогаш според $F3$, постои единствено z, така што е $F(a,m,z) = b$, а тоа значи дека дека $[m, z]$ е единствена права што ги содржи точките P и Q. Нека сега P е точка од правата l_2, а $Q \equiv (a, b)$ е произволна точка; можеме да претпоставиме дека $P \neq P_1$, т.е. дека $P \equiv (0, c)$, $c \in G$. Ако е $a = 0$, тогаш l_2 е единствена права што го содржи P и Q. Затоа нека е $a \neq 0$; тогаш точките P и Q лежат на правата $[y, c]$, каде што y, според $F4$, е единственото решение на равенката $F(a, y, c) = b$. Значи, задоволена е аксиомата II.

Нека l е права низ точката P_1, а $p \equiv [m, b]$ е произволна права; ако е $l \equiv l_1$, тогаш (m) е единствена точка од l и p; ако $l \equiv l_2$, тогаш $(0, b)$ е единствена точка од l и p. Затоа, нека $l \neq l_1, l_2$, т.е. нека $l \equiv [\infty, a]$; ако е $y = F(a, m, b)$, тогаш (a, y) е единствена точка од l и p. Нека сега l е права низ P_2, при што $l \neq l_1$, т.е. $l \equiv [0, a]$ и $m \neq 0$; тогаш (x, a) е единствена точка од l и p, каде што x, според $F5$, е единственото решение на равенката $a = F(x, m, b)$. Значи, задоволена е аксиомата III.

На крајот, дека е задоволена и аксиомата IV, се гледа од тоа што P_1, P_2, $O \equiv (0, 0)$ и $A \equiv (a, a)$, $a \neq 0$, се четири точки, така што било кои три не лежат на иста права.

Со ова е комплетиран доказот на теоремата.

Т. 2. *Ако (G, F) е псевдотернар, тогаш точни се следните особини*:

(i) $F(a, b, 0) = 0 \langle=\rangle a = 0$ *или* $b = 0$;

(ii) *Ако е* $a \neq 0$ *и* $F(a, b, c) = F(a, d, c)$, *тогаш е* $b = d$;

(iii) *Ако е* $b \neq 0$ *и* $F(a, b, d) = F(c, b, d)$, *тогаш е* $b = c$.

Доказ. (i) Ако е $a = 0$ или $b=0$ тогаш според $F1$ имаме и $F(a, b, 0) = 0$.

Обратно, нека е $F(a, b, 0) = 0$ и $b \neq 0$. Според $F5$, постои единствено x, такво што е $F(x, b, 0) = 0$. Но, според $F1$, еден таков елемент е $x = 0$, што значи дека е $a = 0$. Слично, ако е $a \neq 0$, добиваме дека е $b = 0$.

(ii) и (iii) се непосредни последици од (i).

Нека е (G, F) псевдотернар; за елементот $e \in G$, ќе велиме дека е лева единица ако е исполнет условот.

$$(\forall x \in G)\ F(e, x, 0) = x, \tag{1}$$

а за елементот $e' \in G$, ќе велиме дека е десна единица ако е исполнет условот

$$(\forall x \in G)\ F(x, e', 0) = x. \tag{2}$$

За елементот $e \in G$, ќе велиме дека е единица, ако истовремено е и лева, и десна единица. Ако во (G, F) постои лева или десна единица, тогаш таа е единствена и различна од нула, што следува од **Т. 2.** Ако пак e_1 е лева, а e_2 е десна единица тогаш е $e_1 = e_2$.

Нека (G, F) е псеводтернар, $\alpha \neq 0$ — фиксен елемент од G, и нека φ и ψ се пресликувања од G во G дефинирани со:

$$(\forall x \in G)\ \varphi(x) = F(\alpha, x, 0), \tag{3}$$

$$(\forall x \in G)\ \psi(x) = F(x, \alpha, 0). \tag{4}$$

Според **Т. 2.**, пресликувањата φ и ψ се пермутации во G и притоа имаме, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Ако пак α е лева, или десна единица, тогаш имаме $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = \alpha$.

Овие две пермутации ќе ги искористиме за воведување на друг псевдотернар, којшто ќе биде со единица.

L. 1. *Нека (G, F) е псевдотернар и нека $e \neq 0$ е фиксен елемент во G. Ако во G дефинираме тернарна операција F_1 со равенството*

$$F_1(a, b, c) = F(a, \varphi^{-1}(b), c),$$

каде што φ: $G \to G$ *е пермутацијата дефинирана со* (3) *за* $\alpha = e$, *тогаш* (G, F_1) *е псевдотернар со лева единица* e.

Доказ. Бидејќи е $\varphi(0) = 0$ имаме:

$$F_1(a, 0, c) = F(a, \varphi^{-1}(0), c) = F(a, 0, c) = c,$$

$$F_1(0, a, c) = F(0, \varphi^{-1}(a), c) = c,$$

т.е. задоволена е аксиомата F 1.

Нека a, b и c се било кои елементи од G; тогаш постои единствен елемент $z \in G$, за кој важи $c = F(a, \varphi^{-1}(b), z)$, т.е. постои единствен елемент $z \in G$, за кој важи $c = F_1(a, b, z)$. Значи, задоволена е аксиомата F3.

Нека $a \neq 0$, b и c се било кои елементи од G; тогаш постои единствен елемент, да го обележиме со $\varphi^{-1}(y)$, за кој важи $c = F(a, \varphi^{-1}(y), b)$, т.е. $c = F_1(a, y, b)$. Значи, задоволена е аксиомата F 4.

Ако пак $a \neq 0$, b и c се било кои елементи од G, тогаш и $\varphi^{-1}(a) \neq 0$, па постои единствен елемент $x \in G$ за кој важи $c = F(x, \varphi^{-1}(a), b)$, т.е. $c = F_1(x, a, b)$. Значи, задоволена е и аксиомата F5.

Со тоа покажавме дека структурата (G, F_1) е псевдотернар. Дека елементот e е лева единица, следува од:

$$F_1(e, x, 0) = F(e, \varphi^{-1}(x), 0) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x.$$

L. 2. *Нека (G, F) е псевдотернар и нека $e \neq 0$ е фиксен елемент од G. Ако во G дефинираме тернарна операциіа F_2 со равенството*

$$F_2(a, b, c) = F(\psi^{-1}(a), b, c),$$

каде што ψ: $G \to G$ е пермутацијата дефинирана со (4) за $\alpha = e$, тогаш структурата (G, F_2) е псеедотернар со десна единица e.

Докоз. Поради симетрија, слично како во **L. 1.**

Т. 3. *Нека (G, F) е псевдотернар и нека $e \neq 0$ е фиксен елемент од G. Ако во G дефинираме тернарна операција F_3 со равенството*

$$F_3(a, b, c) = F(\psi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b), c),$$

каде φ и ψ се пермутациите во G дефинирани со равенствата (3) и (4) за $\alpha = e$, тогаш структурата (G, F_3) е псевдотернар со единица e и псевдорамнините конструирани над (G, F) и (G, F_3) се изоморфни.

Доказ. Од **L. 1.** и **L. 2.** следува дека (G, F_3) е псевдотернар. Да покажеме дека e е единица во (G, F_3). Нека F_1 е тернарната операција од **L. 1.**; тогаш e е лева единица во (G, F_1), а бидејќи е

$$F_3(a, b, c) = F_1(\psi^{-1}(a), b, c),$$

следува дека e е десна единица во (G, F_3). Понатаму имаме $e = \psi(e)$, па

$$F_3(e, x, 0) = F(\psi^{-1}(e), \varphi^{-1}(x), 0) = F(e, \varphi^{-1}(x), 0) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x,$$

што значи дека e е и лева единица во (G, F_3).

На крајот, нека π е псевдорамнината конструирана над (G, F), а π' — псевдорамнината конструирана над (G, F_3) и нека (f, g) е пар пресликувања од π во π' дефинирани со:

$$
\begin{array}{ll}
f\colon \pi \to \pi' & g\colon \pi \to \pi' \\
(\infty) \to (\infty) & l_\infty \to l_\infty \\
(m) \to (\varphi(m)) & [\infty, a] \to [\infty, \psi(a)] \\
(a, b) \to (\psi(a), b) & [m, c] \to [\varphi(m), c].
\end{array}
$$

Лесно се проверува дека f и g се биекции и дека ја запазуваат инцидентноста. На пример, ако $(a, b) \in [m, c]$ во π, тогаш е

$$b = F(a, m, c) = F_3(\psi(a), \varphi(m), c),$$

т.е. $(\psi(a), b) \in [\varphi(m), c]$ во π'.

Со тоа е комлетиран доказот на теоремата.

LITERATURA

Sandler R.

[1] *Pseudo planes and pseudo ternaries*, Jornal of Algebra, 4 (1966), 300—316.

Скорняков Л. А.

[1] *Натуральные тела Веблен-Веддербарновой проективной плоскости*, Известия Академия наук СССР, 13 (1949) 447—472.

Wesson J. R.

[1] *The construction of projective planes from generalized ternary rings*. The American Math. Monthly, 73, № 1 (1966) 36—40.

A. Samardžiski

ON PSEUDOTERNARS

(Summary)

R. Sandler [1] has shown that with a coordinatization of a pseudo plane a pseudo ternar be obtained, i. e. an algebra *(G,F,).* with a ternary operation F which satisfies the propositions $F1 - F5$. We say that the algebra (G,F) is a generalized pseudo ternar if $F1$, $F3$, $F4$ and $F5$ hold.

In Theorem 1 (of this note) is shown that if (G, F) is a generalized pseudo ternar then a pseudo plane can be constructed over (G, F).

In Theorem 3 is shown that if (G, F) is a generalized pseudo ternar and if a ternary operation F_1 is defined by (5) (where φ and ψ are defined by (3) and (4), and $\alpha = e \neq 0$ is a fixed element of G), then (G, F_1) turns aut to be a pseudo ternar. Furthemore, the pseudo planes over (G, F) and (G, F_1) are isomorphic.