ЗА ЕДЕН ВИД СИСТЕМИ ОД ОПЕРАЦИИ

Б. Л. Трпеновски

Во овој труд се обопштуваат резултатите од трудот [3], со тоа што, пред се, се разгледуваат произволни финитарни, наместо бинарни операции, а и дефиницијата за потполни дедекиндови системи е поопшта отколку соодветната дефиниција во трудот [3].

1. Еднозначното пресликување A: $M^{k+1} \to M$, каде што M е непразно множество, го викаме $(k+1)$-арна операција на M. За A велиме дека е десно инверзибилна операција, ако за секои $a_j, b \in M, j = 1, 2, \ldots k$, равенката

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_k, x) = b$$

е еднозначно решлива по x во М. Операцијата A ја викаме специјална десно инверзибилна, ако за секои $a, b \in M$ постојат $x_j \in M$, $j = 1, 2, \ldots, k$, такви што е

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_k, a) = b.$$

Натаму специјалните десно инверзибилни операции ќе ги викаме само „операции", зашто сите операции што ќе ги разгледуваме овде ќе бидат специјални десно инверзибилни, макар што тоа нема посебно да го нагласуваме. Исто така, за да го скатриме пишувањето, наместо, на пример,

$$A(a, \ldots, b, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k, c, \ldots, s) \quad \text{и}$$

$$A(a, \ldots, b, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{k}, c, \ldots, s),$$

ќе пишуваме, соодветно, $A(a, \ldots, b, x_k^j, c, \ldots, s)$ и $A(a, \ldots, b, \overline{x}^k, c, \ldots, s)$.

Дефиниција 1. Множеството α од операции на M го викаме дедекиндов систем од операции на M, ако за секои $A, B \in \alpha$ и секои $x_j, y_j, s \in M, j=1,2,\ldots,k$, е точно равенството

$$A[x_k^1, B(y_k^1, s)] = B[y_k^1, A(x_k^1, s)].$$

Насекаде натаму за α ќе претпоставуваме дека е дедекиндов систем од операции на M.

Лема 1. Ако за некои $x_j,\ y \in M$ е $A(x_k^1, y) = y$, каде што $A \in \alpha$, тогаш и за секој $s \in M$ е точно равенството $A(x_k^1, s) = s$.

Доказ. Ако е $y \neq x_1$, ќе ги избереме $a_j \in M$ такви да биде $A(a_k^1, y) = x_1$. Тогаш имаме:

$$A(x_k^1, x_1) = A[x_k^1,\ A(a_k^1, y)] = A[a_k^1,\ A(x_k^1, y)] = A(a_k^1, y) = x_1.$$

Нека $s \in M$. Постојат $c_j \in M$, такви што е $A(c_k^1, x_1) = s$. Сега добиваме:

$$A(x_k^1, s) = A[x_k^1,\ A(c_k^1, x_1)] = A[c_k^1,\ A(x_k^1, x_1)] = A(c_k^1, x_1) = s.$$

Лема 2. Ако за некои $x_j, y \in M$, $A, B \in \alpha$ е $A(x_k^1, y) = B(x_k^1, y)$, тогаш и за секој $s \in M$ е $A(x_k^1, s) = B(x_k^1, s)$.

Доказ. Ако е $A(x_k^1, y) = a = B(x_k^1, y)$, добиваме дека е:

$$A(x_k^1, a) = A[x_k^1,\ B(x_k^1, y)] = B[x_k^1,\ A(x_k^1, y)] = B(x_k^1, a).$$

За секој $s \in M$ постојат $c_j \in M$, такви што $A(c_k^1, a) = s$. Така:

$$A(x_k^1, s) = A[x_k^1,\ A(c_k^1, a)] = A[c_k^1,\ A(x_k^1, a)] =$$
$$= A[c_k^1,\ B(x_k^1, a)] = B[x_k^1,\ A(c_k^1, a)] = B(x_k^1, s).$$

Лемата е докажана.

Нека ставиме:

$$(1) \qquad A \rho B \iff (\forall x_j, y_j, s \in M)\ A[x_k^1,\ B(y_k^1, s)] = B[x_k^1,\ A(y_k^1, s)].$$

Лема 3. ρ е еквивалентност во α.

Доказ. Бидејќи рефлексивноста и симетричноста на ρ се очигледни ќе ја докажеме само транзитивноста. Нека е $A \rho B$, $B \rho C$ и нека x_j, y_j, s се произволни елементи од M. Постојат $a_j \in M$, такви што е $B(a_k^1, s) = s$. Тогаш е:

$$A[x_k^1,\ C(y_k^1, s)] = A[x_k^1,\ C[y_k^1,\ B(a_k^1, s)]] = A[x_k^1,\ B[a_k^1,\ C(y_k^1, s)]] =$$
$$= B[x_k^1,\ A[a_k^1,\ C(y_k^1, s)]] = B[x_k^1,\ C[y_k^1,\ A(a_k^1, s)]] =$$
$$= C[x_k^1,\ B[y_k^1,\ A(a_k^1, s)]] = C[x_k^1,\ A[y_k^1,\ B(a_k^1, s)]] = C[x_k^1,\ A(y_k^1, s)],$$

па е и $A \rho C$.

Лема 4. Нека $A, B \in \alpha$. Ако е $A \rho B$ и ако за некои x_j, $y \in M$ е $A(x_k^1, y) = B(x_k^1, y)$, тогаш е $A = B$.

Доказ. Нека е $A(x_k^1, y) = s = B(x_k^1, y)$. Постојат $a_j \in M$, такви што е $A(a_k^1, s) = s$, а тогаш имаме:

$$B(a_k^1, s) = B[a_k^1,\ A(x_k^1, y)] = A[a_k^1,\ B(x_k^1, y)] = A(a_k^1, s) = s.$$

Според лемата 1 имаме дека е $A(a_k^1, c) = c = B(a_k^1, c)$, за секој $c \in M$. Покрај c, нека се и $c_j \in M$ произволно избрани. Конечно добиваме:

$$A(c_k^1, c) = A[c_k^1, B(a_k^1, c)] = B[c_k^1, A(a_k^1, c)] = B(c_k^1, c),$$

што значи дека $A = B$.

Нека ставиме сега:

$$D_a = \{A \in \alpha \,/\, A(\bar{a}^{k+1}) = a,\ a \in M\}. \tag{2}$$

Дефиниција 2. Дедекиндовиот систем α од операции на M го викаме полн ако: (*i*) за секои x_j, y, $s \in M$, во секоја од класите по еквиваленцијата ρ постои операција A, таква што е $A(x_k^1, y) = s$: (*ii*) за секоја операција $A \in \alpha$ постои елемент $a \in M$, таков што е $A(\bar{a}^{k+1}) = a$; (*iii*) во секое од подножествата D_a, за секои x_j, y, $s \in M$, каде што е $y \neq s$ и барем еден $x_j \neq a$, постои операција B, таква што е $B(x_k^1, y) = s$.

Пример. Нека е $M(+)$ комутативна група и нека ставиме:

$$A(x_k^1, y) = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_k) + y, \tag{3}$$

каде што $\phi: M^k \to M$ е сурекција. Јасно е дека со (3) се дефинирани специјални десно инверзибилни операции на M. Лесно се проверува дека секое множество на операции од обликот (3) претставува дедекиндов систем од операции на M. Нека со Φ го означиме множеството од сите сурекции од M^k на M, такви што за секој $\phi \in \Phi$ постои $a \in M$ со особината $\phi(a, a, \ldots, a) = 0$. Натаму, нека Φ ги има особините: (*а*) за секои x_j, y од M, $y \neq 0$ и барем еден $x_j \neq a$, постои $\phi \in \Phi$, таква што е $\phi(a, a, \ldots, a) = 0$ и $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = y$; (*б*) ако $\phi \in \Phi$ и $s \in M$, тогаш и $\phi + s$ припаѓа на Φ, каде што $(\phi + s)(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_k) + s$. (Ако, на пример, $M(+,.)$ е поле, а Φ ги содржи сите пресликувања ϕ од облик $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k + s$, $p_j, s \in M$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_k \neq 0$, тогаш Φ ги има погоре изнесените особини). Лесно може да се провери дека множеството $\alpha(M)$ од сите операции од обликот (3), образувани со помош на сурекциите од Φ, е полн дедекиндов систем од операции на M.

Ќе изнесеме неколку особини на полните дедекиндови системи. Натаму, насекаде, α ќе означува полн дедекиндов систем од операции на M, макар што тоа нема посебно да биде нагласено.

Лема 5. Пресекот на секоја од класите по еквиваленцијата ρ со секое од подмножествата D_a од α содржи точно една операција.

Доказ. Од условот (*i*) од дефиницијата 2 следува дека пресекот на секоја од класите од ρ со секое од подмножествата D_a не е празен. Ако $A, B \in D_a$, ќе имаме дека е $A(\bar{a}^{k+1}) = a = B(\bar{a}^{k+1})$, па ако A и B припаѓаат и на иста класа по ρ, од горното равенство, според лемата 4, следува дека е $A = B$.

Лема 6. Секој полн дедекиндов систем од операции на M е максимален, т. е. не може да се пополни со нова специјална десно инверзибилна операција на M, а пак да остане полн дедекиндов систем.

Доказ. Ќе претпоставиме дека M има барем два различни елемента, зашто во спротиен случај α се состои само од една операција, па тврдењето на лемата е тривијално точно. Нека е K специјална десно инверзибилна операција на M и нека $\acute{\alpha} = \alpha \, U \, \{K\}$ е полн дедекиндов систем. Нека ρ' и ρ се еквиваленти на $\acute{\alpha}$ и α, соодветно, дефинирани со (1). Возможни се, и заемно исклучителни, овие две претпоставки: 1) елемнти на факторното множество $\acute{\alpha} / \rho'$ се сите елементи на α / ρ и уште еден нов елемент — класата што ја содржи операцијата K; 2) еден од елементите на $\acute{\alpha} / \rho'$ е добиен од еден од елементите на α / ρ со пополнување со операцијата K, додека другите елементи на $\acute{\alpha} / \rho'$ се другите елементи од α / ρ. Првата претпоставка, меѓутоа, отпаѓа, зашто доведува до противречност. Имено, ако е $a \neq b$, според (i) од дефиницијата 2 би имале дека е $K(\bar{a}^{k+1}) = a$ и $K(\bar{a}^k, b) = a$, а од тоа, бидејќи K е десно инверзибилна, би следувало дека е $a = b$. Да ја разгледаме втората претпоставка. Нека е $K(a_k^1, b) = c$. Ако го разгледаме системот α, во класата на ρ, во којашто и припаѓа операцијата K, според (i) од дефиницијата 2, постои операција A таква што е $A(a_k^1, b) = c$. Во системот $\acute{\alpha}$, имаме дека A и K и припаѓаат на иста класа по ρ', така што, според лемата 4, ќе добиеме дека е $K = A$, т. е. $K \in \alpha$. Лемата е докажана.

Лема 7. Нека D_0 е едно фиксно подмножество од α, определено со (2), и нека за секои $x, y \in M$ ставиме:

$$x + y = X(x, \bar{0}^{k-1}, y), \tag{4}$$

каде што $X \in D_0$ ја има особината $X(x, \bar{0}^k) = x$ (за вака определената операција X ќе велиме дека е кореспондентна на елементот x). Тогаш $M(+)$ е комутативна група.

Доказ. За секој $x \in M$ постои (во општ случај не еднозначно определена) операција $X \in D_0$, таква што е $X(x, \bar{0}^k) = x$. На пример, за $x = 0$, оваа особина ја имаат сите операции од D_0. Меѓутоа, ако се X_1 и X_2 кореспондентни операции на x, тогаш, според лемата 2, од $X_1(x, \bar{0}^k) = x = X_2(x, \bar{0}^k)$ следува дека за секој $y \in M$, е $X_1(x, \bar{0}^{k-1}, y) = X_2(x, \bar{0}^{k-1}, y)$, така што операцијата „$+$" е добро дефинирана, т. е. не зависи од изборот на кореспондентната операција во D_0. Од $X(x, \bar{0}^k) = x$ следува дека 0 е неутралниот елемент во $M(+)$. Ќе ја докажеме сега комутативноста на операција „$+$": ако X и Y се коерспондентните операции на x и y, соодветно, добиваме:

$$\begin{aligned} x + y &= X[x, \bar{0}^{k-1}, y) = X[x, \bar{0}^{k-1}, Y(y, \bar{0}^k)] = \\ &= Y[y, \bar{0}^{k-1}, X(x, \bar{0}^k)] = Y(y, \bar{0}^{k-1}, x) = y + x. \end{aligned}$$

Имајќи ја предвид штотуку докажаната комутативност, ако X и Z се кореспондентните операции на x и z, соодветно, добиваме дека е:

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= z + (x + y) = Z(z, \bar{0}^{k-1}, x + y) = Z[z, \bar{0}^{k-1}, X(x, \bar{0}^{k-1}, y)] = \\ &= X[x, \bar{0}^{k-1}, Z(z, \bar{0}^{k-1}, y)] = x + (z + y) = x + (y + z), \end{aligned}$$

па, значи, $M(+)$ е полугрупа. Дека $M(+)$ е група, со оглед на веќе докажаната комутативност, следува од тоа што за секои $a, b \in M$ постојат операција $A \in D_0$ и еднозначно определен елемент $x \in M$, такви што е $A(a,\overline{0}^k) = a$ и $A(a,\overline{0}^{k-1},x) = .b$ Лемата е докажана.

Да ја опишеме сега структурата на полните дедекиндови системи:

Теорема 1. Нека α е полн дедекиндов систем од операции на M. Постојат комутативна група M $(+)$ и множество Φ од сурекции од M^k на M, така што $\alpha = \alpha(M)$ ($\alpha(M)$ е системот од понапред изнесениот пример).

Доказ. Нека избериме едно од подмножествата D_0 и нека ја определиме групата $M(+)$ како и во лемата 7. Ќе ставиме:

$$\phi_A(x_1, x_2, \ldots, x_k) = A(x_k^1, 0), \tag{5}$$

а со Φ ќе го означиме множеството од сите пресликувања од обликот (5), определени со помош на сите операции од α. Да го определиме прво обликот на операциите од D_0. Ако $B \in D_0$, x_j, $y \in M$ и ако Y е кореспондентната операција на y, ќе добиеме:

$$\begin{aligned} B(x_k^1, y) &= B[x_k^1, Y(y, \overline{0}^k)] = Y[y, \overline{0}^{k-1}, B(x_k^1, 0)] = \\ &= y + B(x_k^1, 0) = y + \phi_B(x_1, x_2, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

Нека сега $A \in \alpha$. Според лемата 5 постои $B \in D_0$, таква што е $A \rho B$. Од $B(\overline{0}^{k+1}) = 0$, според лемата 1, имаме дека е $B(\overline{0}^k, y) = y$ за секој y од M. Користејќи го понапред добиениот резултат имаме:

$$A(x_k^1, y) = A[x_k^1, B(\overline{0}^k, y)] = B[x_k^1, A(\overline{0}^k, y)] = B[x_k^1, A[\overline{0}^k, Y(y, \overline{0}^k)]],$$

каде што Y е кореспондентната операција на y. Натаму:

$$\begin{aligned} A(x_k^1, y) &= B[x_k^1, Y[y, \overline{0}^{k-1}, A(\overline{0}^{k+1})]] = \\ &= \phi_B(x_1, x_2, \ldots, x_k) + y + A(\overline{0}^{k+1}). \end{aligned}$$

Ако земеме $y = 0$, ќе добиеме дека е:

$$\phi_A(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \phi_B(x_1, x_2, \ldots, x_k) + A(\overline{0}^{k+1}),$$

од каде што добиваме дека е:

$$A(\overline{0}^{k+1}) = \phi_A(x_1, x_2, \ldots, x_k) - \phi_B(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

така што конечно имаме:

$$A(x_k^1, y) = \phi_A(x_1, x_2, \ldots, x_k) + y.$$

За да го завршиме доказот на теоремата, треба да покажеме дека множеството Φ ги има особините од веќе споменатиот пример. Јасно е дека секое пресликување $\phi_A: M^k \to M$ е сурекција. Од (*ii*) од дефиницијата 2 следува дека за секоја сурекција ϕ_A постои $a \in M$, таков што е $\phi_A(a, a, \ldots, a) = 0$, додека од (*iii*) од истата дефиниција следува дека е точна и особината (*а*). Да покажеме дека е точна и особината (*б*): нека $\phi_A \in \Phi$ е определена со (5): операцијата $B(x_k^1, y) = A(x_k^1, y+s)$ е специјална десно инверзибилна во M, за којашто лесно може да се провери дека важи равенството $B[x_k^1, C(y_k^1, c)] = C[y_k^1, B(x_k^1, c)]$, за секои x_j, y_j, $c \in M$ и секоја операција $C \in \alpha$. Во системот $\acute{\alpha} = \alpha \cup \{B\}$ добиваме дека е $A \rho B$, од каде што, поради максималноста на α, се добива дека $B \in \alpha$. Тогаш, поради:

$$\phi_B(x_1, x_2, \ldots, x_k) = B(x_k^1, 0) = \phi_A(x_1, x_2, \ldots, x_k) + s,$$

добиваме дека и $\phi_A + s \in \Phi$. Теоремата е докажана.

При конструкцијата на групата $M(+)$ и множеството сурекции Φ во теоремата 1, тргнавме од едно фиксно подмножество D_0 од α. Ќе видиме каков е односот меѓу групите $M(+)$ и $M((\oplus))$, односно, множествата сурекции Φ и Φ', што се добиваат со помош на две подмножества D_0 и D_0, од α.

Теорема 2. Нека се D_0 и D_0, две подмножества од α, а $[M(+), \Phi]$, односно, $[M((\oplus)), \Phi']$ соодветните парови што се состојат од групата и множеството сурекции конструирани како во теоремата 1. Тогаш групите $M(+)$ и $M((\oplus))$ се изоморфни, а $\Phi = \Phi'$.

Доказ. Во групата $M(+)$ имаме дека е $x+y = X(x, \overline{0}^{k-1}, y)$, каде што X е кореспондентната операција на x. Со помош на парот $[M((\oplus)), \Phi']$, операцијата X може да се претстави на следниов начин: $X(x_k^1, y) = \phi'_X(x_1, x_2, \ldots, x_k) \oplus y$.

Така имаме:

$$x+y = \phi'_X(x, 0, \ldots, 0) \oplus y. \tag{6}$$

Од (6), за $y = 0'$ добиваме дека $\phi'_X(x, 0, \ldots, 0) = x + 0'$, па, ставајќи $\rho(x) = x + 0'$, (6) можеме да го напишеме во облик

$$x+y = \rho(x) \oplus y, \tag{7}$$

при што, очигледно, $\varphi: M \to M$ е биекција. Користејќи го сега равенството (7), добиваме:

$$\rho(x+y) = (x+y)+0' = x+(y+0') = x+\rho(y) = \rho(x) \oplus \rho(y),$$

што покажува дека ρ е изоморфизам.

Нека ϕ'_A е произволна сурекција од Φ'. Претставувајќи ја операцијата А во однос на секој од паровите $[M(+), \Phi]$ и $[M((\oplus)), \Phi']$, ќе добиеме:

$$A(x_k^1, y) = \phi_A(x_1, x_2, \ldots, x_k) + y = \phi'_A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \oplus y. \tag{8}$$

Од (8), за $y = 0'$, добиваме:

$$\phi'_A (x_1, x_2, \ldots, x_k) = \phi_A (x_1, x_2, \ldots, x_k) + 0',$$

така што е $\phi'_A \in \Phi$, т. е. $\Phi' \subseteq \Phi$. Слично се покажува дека е и $\Phi \subseteq \Phi'$. Теоремата е докажана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белоусов В. Д., О дистрибутивных системах операций, Матем. сб. т. 36 (1955), 479—500.

[2] Белоусов В. Д., Основы теории квазигрупп и лупп, Москва (1967).

[3] Трпеновски Б. Л., За еден вид системи од квазигрупи прилози I 2(1969) МАНУ, 5—13.

B. L. Trpenovski

ON A SYSTEM OF OPERATIONS

Summary

Let M be a non-empty set and α a set of $(k+1)$-ary operations on M. For every $A \in \alpha$ we suppose that the following hold: (*i*) for every $a_j, b \in M$ there is uniquely determined $x \in M$ such that $A(a_1, \ldots, a_k, x) = b$, (*ii*) for every $a, b \in M$ there exist $x_j \in M$ such that $A(x_1, \ldots, x_k, a) = b$.

A set α is said to be a ∂-system on M if for every $A, B \in \alpha$ and every $x_j, y_j, z \in M$ the following holds:

$$A[x_1, \ldots, x_k, B(y_1, \ldots, y_k, z)] = B[y_1, \ldots, y_k, A(x_1, \ldots, x_k, z)].$$

Let α be a ∂-system, $A, B \in \alpha$, and let us put:

$$A \rho B \iff (\forall x_j, y_j, z \in M)\, A[x_1, \ldots, x_k, B(y_1, \ldots, y_k, z)] = B[x_1, \ldots, x_k, A(y_1, \ldots, y_k, z)].$$

Then ρ turns out to be an equivalence on α.

Let $D_a = \{A \in \alpha \,/\, A(a, \ldots, a) = a, a \in M\}$.

A ∂-system α on M is said to be a complete ∂-system on M if: (*i*) for every $x_j, y, z \in M$ in each equivalence class modulo ρ there is an operation A such that $A(x_1, \ldots, x_k, y) = z$, (*ii*) for every $A \in \alpha$ there exists $a \in M$ such that $A(a, \ldots, a) = a$, (*iii*) in each $D_a \subseteq \alpha$, for every $x_j, y, z \in M$, $y \neq a$ and some $x_j \neq a$, there exists an operation B such that $B(x_1, \ldots, x_k, y) = z$.

Example Let $M(+)$ be a commutative group and F a set of surjections of M^k on M. Then every set of operations of the form

$$A(x_1, \ldots, x_k, y) = f(x_1, \ldots, x_k) + y, \quad f \in F \tag{1}$$

is a ∂-system. Let F has the properties: (*a*) for every $f \in F$ there exists $a \in M$ such that $f(a, \ldots, a) = 0$, (*b*) for every $x_j, y \in M$, $y \neq 0$ and some $x_j \neq a$, there

exists $f \in F$ such that $f(a, \ldots, a) = 0$ and $f(x_1, \ldots, x_k) = y$, (c) if $f \in F$ and $s \in M$, then $f + s \in F$, where $(f + s)(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k) + s$. If $M(+, .)$ is a field, for example, and F contains all the surjection of the form $f(x_1, \ldots, x_k) = p_1 x_1 + \ldots + p_k x_k + s$, $p_j, s \in M$ and $p_1 + \ldots + p_k \neq 0$, then F has the properties (a), (b) and (c). Now, let $\alpha(M)$ contains all the operations of the form (1), where F has the properties cited above. Then $\alpha(M)$ is a complete ∂-system on M.

Theorem. If α is a complete ∂-system on M, then there exists a commutative group $M(+)$ and a set F of surjections of M^k on M such that $\alpha = \alpha(M)$, where $\alpha(M)$ is as in the example. Furthermore, if $M((\hat{+}))$ and F' is another pair of a commutative group and a set of surjections defined by α, then $M((\hat{+}))$ is isomorphic to $M(+)$ and $F = F'$.