n-ПОЛУГРУПИ ШТО МОЖАТ ДА СЕ ПОПОЛНАТ СО НЕУТРАЛНИ ЕЛЕМЕНТИ

Б. Л. ТРПЕНОВСКИ

1. Познато е дека секоја полугрупа може да се пополни со неутрален елемент. Имено, ако $S(*)$ е полугрупа и ако во $Q=S\cup\{e\}$, $e\notin S$, ставиме $x\circ y=z$ секогаш кога $x*y=z$ во S, а $x\circ e=e\circ x=x$ за секое $x\in Q$, ќе добиеме дека $Q(\circ)$ е полугрупа со неутрален елемент e. Ваквото пополнување е корисно во случаите кога за некои особини на полугрупата S може да се суди преку особините на полугрупата Q, која пак од своја страна може полесно да биде изучена. Покрај интересот што од исти причини би го предизвикала задачата за пополнување со неутрални елементи на n-полугрупите, ваквата задача уште поприродно се наметнува и во врска со основниот резултат од работата [1]: *Ако $S(*)$ е n-полугрупа со неутрален елемент e и ако за секои $x, y\in S$ ставиме $x\circ y=*xye\cdots e$, тогаш за секои $x_0, x_1, \cdots, x_n\in S$ ќе добиеме,*

$$(1) \qquad *x_0x_1\cdots x_n=x_0\circ x_1\circ\cdots\circ x_n,$$

при што $S(\circ)$ ќе биде полугрупа, определена еднозначно до изоморфизам.

Спрема тоа, ако S е n-полугрупа што може да се пополни со неутрален елемент e, тогаш таа ќе биде n-подполугрупа од полугрупата $Q=S\cup\{e\}$, определена на горниот начин. Но, овде искрснува прашањето: дали секоја n-полугрупа S може да се внесе во полугрупа Q конструирана по горе опишаниот начин? Познато е дека ([2]): *За секоја n-полугрупа $S(*)$ постои полугрупа $Q(\circ)$, за која множеството S е генераторно, таква да за секои $x_0, x_1, \cdots, x_n\in S$ важи (1).* Целта на оваа работа ќе биде да ја определиме класата n-полугрупи $S(*)$ што можат да се внесат во полугрупи $Q(\circ)$ (т. е. да важи (1)) такви да $Q\setminus S=\{e\}$, при што e да биде неутрален елемент во $Q(\circ)$. Ќе видиме дека не за секоја n-полугрупа S е тоа можно; класата n-полугрупи со наведената особина е многу тесна и многу блиска до класата полугрупи со неутрални елементи.

2. Преди да преминеме на решавањето на задачата, ќе дадеме еден пример на 2-полугрупа што може да се пополни со неутрален елемент.

Пример: Нека $R(\cdot)$ е полугрупа и нека $e, a\notin R$. Нека се f и g две инволуции од R (за пресликувањето f велиме дека е инволуција од R ако за секое $x\in R$, $f(f(x))=x$), такви да за секои $x, y\in R$ се точни равенствата:

$$(2) \qquad f(x\cdot y)=x\cdot f(y) \quad , \quad g(x\cdot y)=g(x)\cdot y,$$

$$(3) \qquad f(x)\cdot y=x\cdot g(y) \quad , \quad f(g(x))=g(f(x)).$$

(Ако $R(\cdot)$ е група во која елементо b е од ред 2, т. е. $b^2=e$, каде e е неутрален елемент на групата, и ако за секое $x\in R$ ставиме $f(x)=x\cdot b$ и $g(x)=b\cdot x$, тогаш ќе бидат исполнети сите погоре направени претпоставки).

Нека во $Q=S\,U\{e,a\}$ определиме бинарна операција „$\circ$" на следниот начин:

$x\circ y=z$ ако, и само ако $x\cdot y=z$ во R,

$a\circ a=e$ и $x\circ e=e\circ x=x$, за секое $x\in Q$,

$x\circ a=f(x)$ и $a\circ x=g(x)$, за секое $x\in R$.

Може лесно да се види дека $Q(\circ)$ е полугрупа со неутрален елемент и, а ако во $S=Q\setminus\{e\}$ дефинираме тернарна операција „$*$" со $*\,xyz=x\circ y\circ z$, ла секои $x,y,z\in S$, ќе добиеме дека $S(*)$ е 2-полугрупа (таа е значи 2-подеолугрупа од полугрупата Q); нека оваа 2-полугрупа ја наречеме S_{2a}-*полугрупа*.

Улогата на наведениот пример, покрај тоа што со него е покажано постоење на n-полугрупи кои можат да се пополнат со неутрални елементи, ја установува следната

Теорема: *Нека $S(*)$ е n-полугрупа и нека $Q=T\,U\{e\}, e\overline{\in}S$. Тогаш постои полугрупа $Q(\circ)$ со неутрален елемент e, таква да за секои $x_0,x_1,\cdots,x_n\in S$ важи (1), ако и само ако: (i) постои полугрупа $S(\circ)$ таква да важи (1), или (ii) $n=2k$ е парен број и постои S_{2a}-полугрупа $S(\Delta)$ таква да за секои $x_0,x_1,\cdots,x_{2k}\in S$ важи*

$$(4) \qquad *\,x_0\,x_1\cdots x_{2k}=\underbrace{\Delta\cdots\Delta}_{\kappa}(\Delta\,x_0\,x_1\,x_2)\,x_3\cdots x_{2k}.$$

Доказ: Во еден смер теоремата е веќе докажана. Имено, ако е точно (i) тогаш постоењето на Q следува од покажаното во уводот дека секоја полугрупа може да се пополни со неутрален елемент. Ако пак е точно (ii), тогаш доказот следува од изнесениот погоре пример.

Нека сега претпоставиме дека постои полугрупа $Q(\circ)$ со изнесените во теоремата особини. Ако од $x\neq e$ и $y\neq e$ следува секогаш дека и $x\circ y\neq e$, ќе добиеме дека е точно (i) ако ставиме $x\circ y=z$ во S секогаш кога $x\circ y=z$ во Q.

Нека постои барем еден пар елементи $x,y\in Q$ такви да $x\neq e$ и $y\neq e$, но $x\circ y=e$ и нека Q' ги содржи сите елементи од Q со таа особина. Ако ставиме $\Delta\,x_0\,x_1\,x_2=y$ секогаш кога $x_0\circ x_1\circ x_2=y$ во Q, поради тоа што е точно равенството (1) ќе добиеме дека е точно и равенството (4). Останува да покажеме дека $S(\Delta)$ е S_{2a}-полугрупа. Нека $x,y\in Q'$ се такви да $x\circ y=e$. Ако $n=2\kappa-1$, тогаш поради (1) ќе добиеме дека $e=\underbrace{x\circ\cdots\circ x}_{k}\circ\underbrace{y\circ\cdots\circ y}_{k}=$ $=*\underbrace{x\cdots x}_{k}\underbrace{y\cdots y}_{k}\in S$, што противуречи на претпоставката $e\overline{\in}S$. Така, n мора да биде парен број. Нека $n=2k$ и нека $u\circ v=e$, $u,v\in Q'$. Тогаш за секои $x,y,z\in S$ добиваме дека $\Delta\, xyz = x\circ y\circ z = x\circ y\circ z\circ \underbrace{e\circ\cdots\circ e}_{k-1} = x\circ y\circ z\circ \underbrace{u\circ\cdots\circ u}_{k-1}\circ \underbrace{v\circ\cdots\circ v}_{k-1} = *\, zyzu\cdots uv\cdots v\in S$ и значи $S(\Delta)$ е *2-полугрупа*.

Ако $x\in Q'$, тогаш или постои $u\in Q'$ таков да $x\circ u=e$, или пак постои $v\in Q'$ таков да $v\circ x=e$. Ако за некој пар $y,z\in S$ е $x=y\circ z$, тогаш или од $y\circ z\circ u=\Delta\, yzu\in S$ следува дека $e\in S$, или пак истото следува од $v\circ y\circ z=\Delta\, vyz\in S$. Добиената противуречност покажува дека секој елемент од Q' е прост во S во однос на операцијата „$\circ$“. Нека покажеме сега дека за секои $u,v\in Q'$ е $u\circ v=e$. Најпрво нека покажеме дека од $v\circ t=e$ следува дека и $t\circ v=e$. Кога би било $t\circ v=s\neq e$, тогаш би добиле дека $v=e\circ v=(v\circ t)\circ v=v\circ(t\circ v)=v\circ s$, но ова противуречи на погоре докажаната особина за елементите од Q'. Спрема тоа, бидејќи $v\in Q'$, тогаш постои $t\in Q'$ таков да $v\circ t=e$, па од $u\circ v=w\neq e$ би добиле дека $u=u\circ e=u\circ(v\circ t)=(u\circ v)\circ t=w\circ t$, што не е можно, а со што и е докажано тврдењето. Ако се сега a и b елементи од Q', добиваме дека $a=a\circ e=a\circ(a\circ b)=(a\circ a)\circ b=e\circ b=b$ и значи Q' содржи само еден елемент a.

Накрај, нека $R=S\setminus\{a\}$ и нека за секои $x,y\in R$ ставиме $x\cdot y=x\circ y$. Поради тоа што a е прост во S, добиваме дека $R(\cdot)$ е полугрупа, а ако за секое $x\in R$ ставиме $f(x)=x\circ a$ и $g(x)=a\circ x$, пак од истите причини ќе добиеме дека $f(x), g(x)\in R$. Бидејќи пак за секое $x\in R$ важат равенствата $(x\circ a)\circ a=x$ и $a\circ(a\circ x)=x$, добиваме дека f и g се инволуции од R, за кои, поради $(x\circ y)\circ a=x\circ(y\circ a)$, $a\circ(x\circ y)=(a\circ x)\circ v$, $(x\circ a)\circ v=x\circ(a\circ y)$ и $(a\circ x)\circ a=a\circ(x\circ a)$, се точни и равенствата (2) и (3). Сега лесно може да се види дека 2-полугрупата $S(\Delta)$ се добива од полугрупата $R(\cdot)$ на начинот опишан во примерот, т.е. дека $S(\Delta)$ е S_1-*полугрупа*. Теоремата е докажана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Трпеновски и Ѓ. Чупона, Финитарни асоцијативни операции со неутрални елементи, Билтен на ДМФ на НРМ, кн. 12 (1961), 15 — 25.

[2] Ѓ. Чупона, За асоцијативните конгруенции, Билтен на ДМФ на НРМ, кн. 13 (1962), 5 — 12.

B. L. Trpenovski

ON AN EMBEDING OF n-SEMIGROUPS IN SEMIGROUPS

(Summary)

It is known (see for example [2]) that every n-semigroup $S(*)$ can be embeded in a semigroup $Q(\circ)$, such that $S\subseteq Q$ and „$*$“ is a continued product in $Q(\circ)$. The purpose of this note is to describe the class of n-semigroups $S(*)$ which can be embeded in a semigroup $Q(\circ)$ such that $Q\setminus S=\{e\}$ and e is a neutral element in $Q(\circ)$. Such one n-semigroup, for $n=2$, is given by the following

Example. Let $R(\cdot)$ be a semigroup, and let f and g be two mappings of R onto R such that $f(f(x))=x$, $g(g(x))=x$, $f(x\cdot y)=x\cdot f(y)$, $g(x\cdot y)=g(x)\cdot y$, $f(x)\cdot y=x\cdot g(y)$ and $f(g(x))=g(f(x))$, for every $x, y\in R$. (If R is a group with an element b of order 2, and if we put $f(x)=x\cdot b$ and $g(x)=b\cdot x$, then f and g will be two mappings with the above properties). Let $Q=R\cup\{e,a\}$, $e, a\overline{\in} R$, and let we define a binary operation in Q by: $x\circ y=z$ if and only if $x\cdot y=z$ in R, $a\circ a=e$, $x\circ e=e\circ x=x$ for every $x\in Q$, $x\circ a=f(x)$ and $a\circ x=g(x)$, for every $x\in R$. It is easy to see that $Q(\circ)$ is a semigroup in which e is a neutral element, and if we define in $S=Q\setminus\{e\}$ a ternary operation „$*$" by $*\,x\,y\,z=x\circ y\circ z$, for every $x, y, z\in S$, $S(*)$ will be a 2-semigroup; we shall denote this 2-semigroup by S_{2a}.

In this note we show that the following theorem holds:

Theorem. *Let $S(*)$ be an n-semigroup, and let $Q=S\cup\{e\}$, $e\overline{\in}S$. Then there is a semigroup $Q(\circ)$ with a neutral element e, such that, for every $x_0, x_1, \cdots, x_n\in S$,*

$$*\,x_0\,x_1\cdots x_n=x_0\circ x_1\circ\cdots\circ x_n, \tag{1}$$

if and only if: (i) there is a semigroup $S(\circ)$ such that (1) holds, or (ii) $n=2k$ is a pair number and there is a S_{2a} 2-semigroup $S(\Delta)$ such that, for every $x_0, x_1, \cdots, x_{2k}\in S$,

$$*\,x_0\,x_1\cdots x_{2k}=\underbrace{\Delta\cdots\Delta}_{k}(\Delta\,x_0\,x_1\,x_2)\,x_3\cdots x_{2k}. \tag{2}$$