# ЗА ИНФИНИТАРНИТЕ АСОЦИЈАТИВНИ ОПЕРАЦИИ

МАДЕВСКИ Ж., ТРПЕНОВСКИ Б., ЧУПОНА Ѓ.

**1.** Нека $S$ е непразно множество и нека со $S^{\omega}$ го означиме множеството од сите бескрајни низи во $S$. Секое пресликување „*“ од $S^{\omega}$ во $S$ ќе велиме дека е *ω-арна* операција во $S$; притоа, ако со „*“ низата $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ се пресликува во $y$, ќе пишуваме $y = * x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ .

За операцијата „*“ велиме дека е $(i, j)$*-асоцијативна*, ако е точен идентитетот

$$(1) \qquad \begin{aligned} & * x_1 x_2 \cdots x_{i-1} (* x_i \cdots x_n \cdots) y_1 \cdots y_n \cdots = \\ & = * x_1 x_2 \cdots x_{j-1} (* x_j \cdots x_n) y_1 \cdots y_n \cdots, \end{aligned}$$

а структурата $S(*)$ ќе ја наречеме *ω-полугрупа*, ако „*“ е $(i, j)$-асоцијативна ω-арна операција во $S$ за секој пар природни броеви $i, j$.

Примери за ω-полугрупи можат да се најдат лесно:

1. Ако $S$ е (делумно) подредено множество со особината да секое подмножество од $S$ има супремум во $S$, и ако ставиме $* x_1 x_2 \ldots x_n \ldots = \sup \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, ќе добиеме дека $S(*)$ е ω-полугрупа.

2. Нека $S$ е множеството од реалните броеви дополнето со нов елемент $\sim$. Ако ставиме $\Sigma x_i = y$ секогаш кога редот $\Sigma x_i$ е конвергентен и неговата сума е $y$, а $\Sigma x_i = \sim$ кога редот $\Sigma x_i$ е дивергентен, или пак некој од елементите $x_i$ е еднаков со $\sim$, ќе добиеме дека $S(\Sigma)$ е ω-полугрупа.

3. На секое множество $S$ може да се изгради структура на ω-полугрупа, ако се стави $* x_1 x_2 \cdots x_n \cdots = x_1$, или пак $* x_1 x_2 \cdots x_n \cdots = a$, каде $a$ е фиксен елемент од $S$.

По аналогија со случајот кога „*“ е финитарна операција, може да се воведе и поимот за *ω-група*. Имено, за ω-полугрупата $S(*)$ ќе речеме дека е ω-група, ако за секоја низа елементи $a_1, a_2, \cdots, a_n, \ldots$ од $S$ и секој природен број $i$ постои елемент $x$ во $S$, таков да е точно равенството

$$(2) \qquad * a_1 a_2 \cdots a_{i-1} \, x \, a_{i+1} \cdots = a_i .$$

Ако $S$ се состои само од еден елемент $a$ и ако ставиме $* aa \cdots a \cdots = a$, ќе добиеме дека $S(*)$ е ω-група. Оваа ω-група ќе ја наречеме *тривијална*, а основниот резултат на оваа работа е следната

**Теорема.** *Не постои нетривијална ω-група.*

Точноста на теоремата ќе ја добиеме како следствие од неколку леми од поопшт карактер.

**2.** Во овој дел секогаш ќе претпоставуваме дека $S(*)$ е $\omega$-полугрупа, без да го тоа специјално спомнуваме.

**Лема 1.** *Нека $a, b \in S$ и нека постои елемент $d \in S$ таков да $b = *cda \cdots a \cdots$, каде $c = aa \cdots a \cdots$. Тогаш, точно е равенството*

$$*baa \cdots a \cdots = *aba \cdots a \cdots. \tag{3}$$

**Доказ.** Навистина, од направените претпоставки добиваме,

$$\begin{aligned} *baa \cdots a \cdots &= *(*cdaa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= *c\,(*daa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= *(*aa \cdots a \cdots)(*daa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= *a\,(*aa \cdots a \cdots)(*daa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= *ac\,(*daa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= *a\,(*cdaa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= *abaa \cdots a \cdots. \end{aligned}$$

**Лема 2.** *Нека е точен идентитетот $*xyx \cdots x \cdots = *yxx \cdots x \cdots$, и нека за секои $a, b \in S$ постои $c \in S$ такво да $b = *aca \cdots a \cdots$. Тогаш точен е и идентитетот*

$$*yx_1 x_2 \cdots x_n \cdots = *x_1 x_2 \cdots x_n \cdots. \tag{4}$$

**Доказ.** Нека $y, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ се произволни елементи од $S$. По претпоставка постои елемент $z \in S$, таков да $*yzyy \cdots y \cdots = x_1$. Тогаш имаме,

$$\begin{aligned} *x_1 x_2 \cdots x_n \cdots &= *(*yzyy \cdots y \cdots)\, x_2 x_3 \cdots x_n \cdots \\ &= *y\,(*zyy \cdots y \cdots)\, x_2 x_3 \cdots x_n \cdots \\ &= *y\,(*yzy \cdots y \cdots)\, x_2 x_3 \cdots x_n \cdots \\ &= *yx_1 x_2 x_3 \cdots x_n \cdots. \end{aligned}$$

**Лема 3.** *Нека се точни следните услови: ($i$) за секое $x \in S$ постои низа $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \in S$ таква да $x = *a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$; ($ii$) ако е точно равенството $*a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = *b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$, тогаш е точно и равенството $*xa_1 a_2 \cdots a_n \cdots = *xb_1 b_2 \cdots b_n \cdots$, за секое $x \in S$. Ако ставиме*

$$*xy_1 y_2 \cdots y_n \cdots = x \circ (*y_1 y_2 \cdots y_n \cdots), \tag{5}$$

*ќе добиеме бинарна асоцијативна операција „$\circ$" во $S$, т. е. $S(\circ)$ ќе биде полугрупа.*

**Доказ.** Од направените претпоставки е јасно дека „$\circ$" е (еднозначна) бинарна операција во $S$, а лесно се покажува дека таа е и асоцијативна.

**Лема 4.** *Нека важи следниот закон за кратење: од $*xzz \cdots z \cdots = *yzz \cdots z \cdots$ следува $x = y$. Тогаш секој елемент $x$ од $S$ е идемпотент, т. е. точно е равенството $*xx \cdots x \cdots = x$.*

**Доказ.** Нека $x \in S$ и нека $*xx \cdots x \cdots = y$. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned} *xyy \cdots y \cdots &= *x\,(*xx \cdots x \cdots)\, yy \cdots y \cdots \\ &= *(*xx \cdots x \cdots)\, yy \cdots y \cdots \\ &= *yyy \cdots y \cdots, \end{aligned}$$

од каде пак следува $x = y$, т. е. $*xx \cdots x \cdots = x$.

**Лема 5.** *Ако секој елемент од $S$ е идемпотент и ако важи законот за кратење:* $*xyy\cdots y\cdots = *xxy\cdots y\cdots \Rightarrow x=y$, *тогаш $S$ содржи само еден елемент.*

**Доказ.** Нека $x, y \in S$. Имаме;

$$\begin{aligned} *xyy\cdots y\cdots &= *(*xx\cdots x\cdots)yy\cdots y\cdots \\ &= *x(*xx\cdots x\cdots)yy\cdots y\cdots \\ &= *xxyy\cdots y\cdots, \end{aligned}$$

од каде следува $x=y$.

**3. Доказ на теоремата.** Од докажаните погоре леми, лесно се добива точноста на теоремата. Навистина, нека претпоставиме дека $S(*)$ е дадена $\omega$-група. Од лемите 1 и 2 следува дека во $S$ се точни идентитетите: $*xyy\cdots y\cdots = *yxy\cdots y\cdots$ и $*yx_1x_2\cdots x_n\cdots = *x_1x_2\cdots x_n\cdots$. Од ова пак е јасно дека се исполнети претпоставките на лемата 3, па ако ставиме $*x_1x_2\cdots x_n\cdots = x_1\circ(*x_2\cdots x_n\cdots)$, ќе добиеме дека $S(\circ)$ е полугрупа. Нека $a,b\in S$ и нека $a=*a_1a_2\cdots a_n\cdots$. Бидејќи равенката $*xa_1a_2\cdots a_n\cdots=b$ има решение по $x$ во $S$, решлива по $x$ во $S$ ќе биде и равенката $x\circ a=b$. Исто така, ако $c_1, c_2, \cdots, c_n\cdots$ се било кои елементи од $S$, тогаш и равенката $*azc_1c_2\cdots c_n\cdots=b$ ќе има решение по $z$ во $S$, а тогаш $y=*zc_1c_2\cdots c_n\cdots$ ќе биде решение на равенката $a\circ y=b$. Со тоа докажавме дека $S(\circ)$ е група, од каде следува евидентноста на претпоставките од лемите 4 и 5, а спрема последната од овие две леми, и дека $S$ содржи само еден елемент, т. е. $\omega$-групата $S(*)$ е тривијална.

Со тоа теоремата е докажана.

**Забелешка.** Може лесно да се види дека сите докажани погоре леми се точни и при претпоставката дека „$*$" е само (1, 2)-асоцијативна. Истото се однесува и за теоремата, при што доволно е да се претпостави само решливост на равенката $b=*axa\cdots a\cdots$, за секои $a,b\in S$,

Докажаната теорема укажува на тоа дека $\omega$-групите не се од интерес, но на мислење сме дека добиениот резултат може да се искористи при изучувањето на $\omega$-полугрупите.

Madevski Ž., Trpenovski B., Čupona G.

## A NOTE ON INFINITARY ASSOCIATIVE OPERATIONS

(Summary)

Let $S$ be a non-empty set and $S^\omega$ the set of all infinite sequences $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ of elements belonging to $S$ Every mapping „$*$" of $S^\omega$ into $S$ is said to be an *$\omega$-ary* operation on $S$; we write $y=*(x_1x_2\cdots x_n\cdots)$ if the sequence $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ is mapped on y by the operation „$*$". The operation „$*$" is called *$(i, j)$-associative* if the following identity equation is satisfied in $S$:

$$\begin{aligned} (1)\qquad & *(x_1\cdots x_{i-1}*(x_i\cdots x_n\cdots)y_1\cdots y_n\cdots)= \\ & = *(x_1\cdots x_{j-1}*(x_j\cdots x_n\cdots)y_1\cdots y_n\cdots); \end{aligned}$$

and $S(*)$ is said to be an ω-*emigroup* if „$*$" is $(i, j)$-associative for every pair $(i, j)$.

It is easy to give several examples of ω-semigroups. So, let $S(\cdot)$ be a semigroup with an identity $(e)$ and a zero $(o)$; by putting $*(x_1 x_2 \cdots x_n \cdots) = x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \cdots \cdot x_{i_k}$ if $x_j = e$ for every $j \neq i_1, i_2, \cdots, i_k$, and $*(x_1 x_2 \cdots x_n \cdots) = o$, in every other case, we obtain an ω-semigroup. In an obvious way we can obtain two ω-semigroups in every complete lattice.

An ω-semigroup $S(*)$ is said to be an *ω-group* if for every $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \in S$, and every $i \in \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ there is an element $x \in S$ such that $*(a_1, a_2, \cdots a_{i-1} x a_{i+1} \cdots) = a_i$. If the set $S$ contains only one element $a$, by putting $*(a \cdots a \cdots) = a$, we obtain an ω-group; it is called a *trivial* ω-group. The main result of this note is the following

**Theorem.** *There does not exist a non-trivial ω-group.*

This theorem is a consequence of some results about ω-semigroups. Let $S(*)$ be an ω semigroup. The following Lemmas are satisfied:

**Lemma 1.** *Let $a, b \in S$ and $c = *(aa \cdots a \cdots)$. If there is an element $d \in S$ such that $b = *(cdaa \cdots a \cdots)$, then we have $*(baa \cdots a \cdots) = *(aba \cdots a \cdots)$.*

**Lemma 2.** *Suppose that the following idᴗn ity equation is true: $*(xyxx \cdots x \cdots) = *(yxx \cdots x \cdots)$. If for every $a, b \in S$ there is an element $c \in S$ such that $b = *(aca \cdots a \cdots)$, then the fᴗllowing iden ity equation is satisfied: $*(yx_1 x_2 \cdots x_n \cdots) = *(x_1 x_2 \cdots x_n \cdots)$.*

**Lemma 3.** *Suppose that, for every $x \in S$, there are elements $a_1, a_2 \cdots a_n, \cdots \in S$ such that $x = *(a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)$, and that the equation $*(b_1 b_2 \cdots b_n \cdots) = *(c_1 c_2 \cdots c_n \cdots)$ implies that the equation $*(xb_1 b_2 \cdots b_n \cdots) = *(xc_1 c_2 \cdots c_n \cdots)$ is satisfied for every $x \in S$. Then, by putting $x \circ (*(y_1 \cdots y_n \cdots)) = *(xy_1 \cdots y_n \cdots)$, we obtain a semigroup $S(\circ)$.*

**Lemma 4.** *If, for every $x, y, z \in S$, $*(xz \cdots z \cdots) = *(yz \cdots z \cdots)$ implies $x = y$, then every element $u \in S$ is idempotent, i. e. $*(uu \cdots u \cdots) = u$.*

**Lemma 5.** *If every element of $S$ is idempotent, and if the following cancellation law is satisfied in $S$: $*(xyy \cdots y \cdots) = *(xxy \cdots y \cdots) \Rightarrow x = y$, then $S$ contains only one element.*