ЗА НЕКОИ КОМПАТИБИЛНИ ФАМИЛИИ ПОЛУГРУПИ

Ѓ. Чупона

(Примено на 18.II.1963)

Увод. Нека $\{M_\alpha; \alpha \in A\}$ е компатибилна фамилија полугрупи.[1] Во унијата $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$ е определена (еднозначно) една делумична асоцијативна операција. Таа делумична операција може да се прошири до потполна на различни начини, а од поголем интерес се оние проширувања при кои се запазува асоцијативноста. Во оваа работа се разгледува еден специјален вид компатибилни фамилии изоморфни полугрупи чии унии се полугрупи за кои дадените полугрупи се леви идеали (Теорема 1). Во теоремата 2 се покажува дека унијата е редуцибилна полугрупа, ако и само ако се редуцибилни полугрупите од дадената фамилија. Во теоремата 3 се разгледува еден специјален вид полугрупи кои се унии на леви идеали; при тоа се добива дека сите тие леви идеали се изоморфни и дека формираат една изоморфно-компатибилна фамилија полугрупи.

Сега ќе ги дефинираме поимите што ќе ги користиме во работава, а потоа ќе ги формулираме поважните резултати. При докажувањето на тие резултати, ќе изнесеме и неколку други (поопшти) резултати, кои даваат попотполна слика за фамилиите полугрупи што се предмет на изучување.

Фамилијата полугрупи $\{M_\alpha; \alpha \in A\}$ е изоморфно-компатибилна ако постои систем изоморфизми $\{\varphi^\alpha_\beta; \alpha, \beta \in A\}$ (при што φ^α_β е изоморфизам од M_α на M_β) со следните особини:

(0.1) $\quad x_\alpha \varphi^\alpha_\alpha = x_\alpha$ (т. е. φ^α_α е идентичниот автоморфизам на M_α);

(0.2) $\quad \varphi^\alpha_\beta \varphi^\beta_\gamma = \varphi^\alpha_\gamma$;

(0.3) $$x \in M_\alpha \cap M_\beta \Rightarrow \begin{cases} (0.3.1) \quad x\varphi^\alpha_\beta = x; \\ (0.3.2) \quad (y_\alpha x)\varphi^\alpha_\beta = y_\alpha x. \end{cases}$$

Во тој случај, ако ставиме

(0.4) $\quad x_\alpha * x_\beta = x_\alpha \varphi^\alpha_\beta \cdot x_\beta$,

---

[1]) [2] стр. 2

во множеството $M = \bigcup_{\alpha} M_\alpha$ ќе организираме структура $M(*)$ за која велиме дека е унија на дадената фамилија полугрупи.

За една полугрупа $M(\cdot)$ велиме дека е редуцибилна[2]) ако максималните членови на фамилијата $\{Mx;\, x \in M\}$ го покриваат множеството M, т. е. ако $MQ = M$, каде множеството $Q \subseteq M$ е определено со

$$(0.5) \qquad x \in Q \Longleftrightarrow \{Mx \subseteq My \Longrightarrow Mx = My\}.$$

Во наредните три теореми се содржани главните резултати од оваа работа.

Теорема 1. Унијата $M(*)$ на дадена изоморфно-компатибилна фамилија полугрупи $\{M_\alpha;\, \alpha \in A\}$ е полугрупа, а секоја полугрупа M_α е лев идеал на $M(*)$. Полугрупата $M(*)$ не зависи (до изоморфизам) од системот изоморфизми $\{\varphi_\beta^\alpha;\, \alpha, \beta \in A\}$.

Теорема 2. Унијата на една изоморфно-компатибилна фамилија полугрупи е редуцибилна полугрупа, ако и само ако е редуцибилна секоја полугрупа од таа фамилија. (Поради изоморфизмот, доволно е да се претпостави редуцибилноста на една полугрупа од таа фамилија).

Теорема 3. Нека полугрупата $M(\cdot)$ е унија на фамилија нејзини леви идеали во секој од кои важи законот за кратење од десно и се содржи неутрален елемент. Во тој случај, дадената фамилија идеали е изоморфно-компатибилна (како фамилија полугрупи), а $M(\cdot)$ е унија од таа фамилија (во смисол на погоре дадената дефиниција за унија од една изоморфно-компатибилна фамилија полугрупи).

1. Доказ на теоремата 1.

Да покажеме прво дека секоја изоморфно-компатибилна фамилија полугрупи е и компатибилна, т. е. ако $x, y \in M_\alpha \cap M_\beta$, тогаш „производот" xy има иста вредност во M_α како и во M_β. За таа цел, нека со $x \gamma y$ го означиме производот xy во M_γ. Спрема (0.3), имаме

$$(1.1) \qquad x, y \in M_\alpha \cap M_\beta \Longrightarrow x \alpha y = (x \alpha y)\varphi_\beta^\alpha = x\varphi_\beta^\alpha \beta y \varphi_\beta^\alpha = x \beta y.$$

Значи, $M_\alpha \cap M_\beta$ е подполугрупа од M_α и од M_β. Од (0.3.2) се гледа и тоа дека $M_\alpha \cap M_\beta$ е лев идеал на M_α и на M_β. (При тоа и празното подмножетво сметаме дека е подполугрупа или идеал).

Ќе покажеме сега дека операцијата «$*$» определена со (0.4) е еднозначна, т. е. дека $M(*)$ е групоид. Нека $x \in M_\alpha \cap M_\beta$ и $y \in M_\gamma \cap M_\delta$.

Спрема (0.3), имаме:

$$(1.2) \qquad x\varphi_\gamma^\alpha \cdot y = (x\varphi_\gamma^\alpha \cdot y)\varphi_\delta^\gamma = x\varphi_\gamma^\alpha \varphi_\delta^\gamma \cdot y\varphi_\delta^\gamma = x\varphi_\delta^\alpha \cdot y,$$

а исто така и

$$(1.3) \qquad x\varphi_\delta^\beta \cdot y = x\varphi_\gamma^\beta \cdot y.$$

---

[2]) Овој поим го воведовме во работа [3]

Од (1.2) и (1.3) следува еднозначноста на «*».

Освен тоа, имаме

(1.4) $$(x_\alpha * x_\beta) * x_\gamma = (x_\alpha \varphi^\alpha_\beta \cdot x_\beta)\varphi^\beta_\gamma \cdot x_\gamma = x_\alpha \varphi^\alpha_\beta \varphi^\beta_\gamma \cdot x_\beta \varphi^\beta_\gamma \cdot x_\gamma$$
$$= x_\alpha \varphi^\alpha_\gamma \cdot x_\beta \varphi^\beta_\gamma \cdot x_\gamma = x_\alpha \varphi^\alpha_\gamma \cdot (x_\beta * x_\gamma)$$
$$= x_\alpha * (x_\beta * x_\gamma),$$

т. е. добиваме $M(*)$ да е полугрупа.

Спрема (0.3) и (0.4), имаме

(1.5) $$x_\alpha * y_\alpha = x_\alpha \varphi^\alpha_\alpha \cdot y_\alpha = x_\alpha \cdot y_\alpha,$$

од што следува $M_\alpha(\cdot)$ да е подполугрупа од $M(*)$. Исто така имаме

(1.6) $$M * M_\alpha \subseteq M_\alpha,$$

т. е. M_α е лев идеал на $M(*)$.

Нека претпоставиме сега $\{\psi^\alpha_\beta; \alpha, \beta \in A\}$ да е друг систем изоморфизми со особините (0.1), (0.2) и (0.3). Ако ставиме

(1.7) $$x_\alpha \circ x_\beta = x_\alpha \psi^\alpha_\beta \cdot x_\beta,$$

добиваме друга полугрупа $M(o)$. Нека γ е фиксен елемент од A. Ако ставиме

(1.8) $$x_\alpha \tau = x_\alpha \psi^\alpha_\gamma \varphi^\gamma_\alpha,$$

добиваме обратно-еднозначно пресликување τ од M на M. При тоа имаме и

(1.9) $$(x_\alpha o\, x_\beta)\tau = (x_\alpha \psi^\alpha_\beta \cdot x_\beta)\psi^\beta_\gamma \varphi^\gamma_\beta = x_\alpha \psi^\alpha_\gamma \varphi^\gamma_\beta \cdot x_\beta \psi^\beta_\gamma \varphi^\gamma_\beta$$
$$= x \psi^\alpha_\gamma \varphi^\gamma_\alpha \varphi^\alpha \cdot x_\beta \psi^\beta_\gamma \varphi^\gamma_\beta = x_\alpha \tau \varphi^\alpha_\beta \cdot x_\beta \tau$$
$$= x_\alpha \tau * x_\beta \tau,$$

т. е. τ е изоморфизам од $M(o)$ на $M(*)$.

Со тоа точноста на теоремата 1 е докажана.

За натаму, наместо $x_\alpha * x_\beta$ (или $x_\alpha o\, x_\beta$) ќе пишуваме $x_\alpha x_\beta$.

Ќе изнесеме уште неколку особини на изоморфно-компатибилните фамилии полугрупи.

Теорема 1. 1. Од $M_\alpha \subseteq M_\beta$ следува $M_\alpha = M_\beta$ и $\varphi^\alpha_\gamma = \varphi^\beta_\gamma$.

Доказ. Прво имаме $M_\beta = M_\alpha \varphi^\alpha_\beta$, бидејќи φ^α_β е изоморфизам од M_α на M_β. Од друга страна, спрема (0.3.1) (поради $M_\alpha \cap M_\beta = M_\alpha$), имаме $M_\alpha = M_\alpha \varphi^\alpha_\beta$, т. е. $M_\alpha = M_\beta$. исто така спрема (0.3.1), добиваме

$$x \in M_\alpha = M_\alpha \cap M_\beta \implies x\varphi^\alpha_\gamma = x\varphi^\alpha_\beta \varphi^\beta_\gamma = x\varphi^\beta_\gamma,$$

т. е. $\varphi^\alpha_\gamma = \varphi^\beta_\gamma$.

За една фамилија изоморфно-компатибилни полугрупи велиме дека е чиста, ако полугрупите со различни индекси се различни. Од последната теорема се гледа дека во тој случај не е можна релацијата $M_\alpha \subset M_\beta$. Јасно е и тоа дека (со редуцирање на множеството од индекси) секоја изоморфно-компатибилна фамилија полугрупи може да се прочисти, без да се при тоа битно измени нејзината структура.

Теорема 1. 2. Ако полугрупите од една чиста изоморфно-компатибилна фамилија полугрупи немаат вистински леви идеали, тогаш различните полугрупи од гаа фамилија немаат заеднички елементи.

Доказ. Од тоа што $M_\alpha x_\alpha$ е лев идеал на M_α следува дека е точно равенството $M_\alpha x_\alpha = M_\alpha$. Нека земеме сега x да припаѓа на M_α и на M_β. Од тоа следува

$$M_\alpha = M_\alpha x \subseteq M_\alpha (M_\alpha \cap M_\beta) \subseteq M_\alpha \cap M_\beta, \text{ т. е. } M_\alpha = M_\beta,$$

што е можно само за $\alpha = \beta$.

Теорема 1. 3. Секоја фамилија $\{M_\alpha ; \alpha \in A\}$ од меѓусебе изоморфни и дисјунктни полугрупи е изоморфно-компатибилна. Унијата на таа фамилија полугрупи е изоморфна со полугрупата $F(o)$ определена со

$$F = M_\alpha \times A, \ (x_\alpha, \beta) \circ (y_\alpha, \gamma) = (x_\alpha y_\alpha, \gamma),$$

каде α е било кој фиксен елемент од A.

Доказ. Нека α е фиксен елемент од A, а φ^α_β изоморфизам од M_α на M_β. Ако ставиме

$$\varphi^\beta_\gamma = \left(\varphi^\alpha_\beta\right)^{-1} \varphi^\alpha_\gamma, \tag{1.10}$$

добиваме систем изоморфизми $\left\{\varphi^\beta_\gamma ; \beta, \gamma \in A\right\}$. Точноста на (0.1) е јасна. Спрема (1.10), имаме

$$\varphi^\beta_\gamma \varphi^\gamma_\delta = \left(\varphi^\alpha_\beta\right)^{-1} \varphi^\alpha_\gamma \left(\varphi^\alpha_\gamma\right)^{-1} \varphi^\alpha_\delta = \left(\varphi^\alpha_\beta\right)^{-1} \varphi^\alpha_\delta = \varphi^\beta_\delta,$$

т. е. ја добиваме точноста на (0.3). Поради $M_\beta \cap M_\gamma = \emptyset$ за $\beta \neq \gamma$, точна е и релацијата (0.3). Со тоа покажуваме дека дадената фамилија полугрупи е изоморфно-компатибилна.

$$\text{Нека:} \quad F = M_\alpha \times A, \quad (x_\alpha, \beta) \circ (y_\alpha, \gamma) = (x_\alpha y_\alpha, \gamma).$$

Ако ставиме

$$x_\beta \xi = \left(x_\beta \varphi^\beta_\alpha, \beta\right) \tag{1.11}$$

добиваме обратно-еднозначно пресликување од $M = \bigcup_\beta M_\beta$ на F. Освен тоа имаме

$$(x_\beta \, x_\gamma)\,\xi = \left(x_\beta \, \varphi_\gamma^\beta \, x_\gamma\right)\xi = \left(\left(x_\beta \, \varphi_\gamma^\beta \, x_\gamma\right)\varphi_\alpha^\gamma, \gamma\right)$$

$$= \left(x_\beta \, \varphi_\alpha^\beta \cdot x_\gamma \, \varphi_\alpha^\gamma, \gamma\right) = \left(x_\beta \, \varphi_\alpha^\beta, \beta\right) \circ \left(x_\gamma \, \varphi_\alpha^\gamma, \gamma\right)$$

$$= x_\beta \, \xi \circ x_\gamma \, \xi,$$

т. е. добиваме ξ да е изоморфизам од $M(o)$ на $F(o)$.

Со тоа точноста на теоремата е докажана.

Од горното следува дека дисјунктните изоморфно-компатибилни фамилии полугрупи не се од интерес. Затоа, се наложува прашањето дали постојат (чисти) изоморфно-компатибилни фамилии полугрупи кај кои различните полугрупи имаат заеднички елементи. Дека на тоа прашање му следува потврден одговор, се гледа од следниот едноставен

Пример 1. 4. Нека $M_\alpha = \{1', 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ и $M_\beta = \{1'', 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ се две полугрупи изоморфни со мултипликативната полугрупа на целите броеви. Јасно е дека фамилијата $\{M_\alpha, M_\beta\}$ е изоморфно-компатибилна, а при тоа имаме; $i\,\varphi_\beta^\alpha = i\,\varphi_\alpha^\beta = i$ за $i \neq 1', 1''$, a $1'' = 1'\,\varphi_\beta^\alpha = 1''\,\varphi_\beta^\beta$, $1' = 1''\,\varphi_\alpha^\beta = 1'\,\varphi_\alpha^\alpha$.

1. 6. Изоморфноста на полугрупите од дадена фамилија не е доволен услов за да таа биде изоморфно-компатибилна. Имено, ако е дадена една фамилија изоморфни групи кои не се дисјунктни (спрема теоремата 1.2) таа фамилија нема да биде изоморфно-компатибилна. Во врска со тоа се наметнува проблемот да се дадат некои внатрешни карактеристики на поимот за изоморфна-компатибилност. На пример, како што видовме погоре, за да дадена фамилија полугрупи биде изоморфно-компатибилна нужно е да бидат исполнети следните релации:

(1.12) $$x, y \in M_\alpha \cap M_\beta \Rightarrow x \alpha y = x \beta y;$$

(1.13) $$M_\alpha (M_\alpha \cap M_\beta) \subseteq M_\alpha \cap M_\beta.$$

Интересно е да се провери дали (покрај изоморфноста) тие услови се и доволни за да дадената фамилија полугрупи биде изоморфно-компатибилна.

2. Доказ на теоремата 2.

Теоремата 2 е следствие на следната поопшта

Теорема 2. 1. Ако полугрупата M е унија на фамилијата изоморфно -компатибилни полугрупи, $\{M_\alpha ; \alpha \in A\}$ тогаш: $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$, каде $1^\circ - 2^\circ - 3^\circ$: $M_\alpha x_\alpha - M_\alpha . x_\alpha \varphi_\beta^\alpha - M x_\alpha -$ е максимален член на фамилијата

$$\{M_\alpha y_\alpha ;\ y_\alpha \in M_\alpha\} - \{M_\beta y_\beta ;\ y_\beta \in M_\beta\} - \{My;\ y \in M\}.$$

Доказ. Дека $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$ следува од тоа што M_α со φ_β^α изоморно се пресликува на M_β. Спрема (1.6), $\{M_\alpha y_\alpha ;\ y_\alpha \in M_\alpha\}$ е подфамилија од фамилијата $\{My ;\ y \in M\}$, па значи имаме $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$.

Нека земеме сега $M_\alpha x_\alpha$ да е максимален член на фамилијата $\{M_\alpha y_\alpha; y_\alpha \in M_\alpha\}$ и нека

(2.1) $$x_\beta = x_\alpha \varphi_\beta^\alpha, \quad M x_\alpha \subseteq M y_\beta.$$

Спрема (1.6), имаме

(2.2) $$M_\alpha x_\alpha \subseteq M_\beta y_\beta,$$

а од тоа (спрема (0.3)) се добива

(2.3) $$M_\beta x_\beta = (M_\alpha x_\alpha)\varphi_\beta^\alpha = M_\alpha x_\alpha \subseteq M_\beta y_\beta,$$

што (поради 1° <=> 2°) повлекува

(2.4) $$M_\beta x_\beta = M_\alpha x_\alpha = M_\beta y_\beta, \text{ т. е. } M x_\alpha = M y_\beta.$$

со тоа покажавме дека 1° => 3°, т. е. точноста на теоремата 2. 1.

Ќе ја докажеме сега теоремата 2.

Нека M_α е редуцибилна полугрупа и нека $\{M_\alpha x_\alpha; x_\alpha \in Q_\alpha\}$ е системот од сите максимални членови на фамилијата $\{M_\alpha y_\alpha; y_\alpha \in M_\alpha\}$. Од тоа (спрема теоремата 2. 1) следува дека $\{M x; x \in Q = \bigcup_\beta Q_\alpha \varphi_\beta^\alpha\}$ ги содржи сите максимални членови на фамилијата $\{My; y \in M\}$. Освен тоа, поради $M_\alpha Q_\alpha = M_\alpha$, имаме

(2.5) $$M Q = M\left(\bigcup_\beta Q_\alpha \varphi_\beta^\alpha\right) = \bigcup_\beta M \cdot Q_\alpha \varphi_\beta^\alpha = \bigcup_\beta M_\beta \cdot Q_\alpha \varphi_\beta^\alpha = \bigcup_\beta M_\alpha \varphi_\beta^\alpha \cdot Q_\alpha \varphi_\beta^\alpha$$
$$= \bigcup_\beta (M_\alpha Q_\alpha)\varphi_\beta^\alpha = \bigcup_\beta M_\alpha \varphi_\beta^\alpha = \bigcup_\beta M_\beta = M.$$

Добивме значи дека $M(\cdot)$ (т. е. унијата на дадената изоморфно-компатибилна фамилија полугрупи) е редуцибилна.

Нека претпоставиме сега M да е редицибилна полугрупа и нека $\{M x; y \in Q\}$ биде системот од сите максимални членови на фамилијата $\{M y; y \in Q\}$. Постои $\beta \in A$ така да $Q_\beta = Q \cap M_\beta$ е непразно множество, бидејќи множеството Q не е празно. Од тоа (спрема теоремата 2.1) следува дека за секое $\alpha \in A$ множеството Q_α $(= Q \cap M_\alpha)$ е непразно множество и дека $\{M_\alpha x_\alpha; x_\alpha \in Q_\alpha\}$ се состои од сите максимални членови на $\{M_\alpha y_\alpha; y_\alpha \in M_\alpha\}$; уште повеке, при тоа имаме $Q_\beta = Q_\alpha \varphi_\beta^\alpha$ и $Q = \bigcup_\beta Q_\beta$. Ќе докажеме дека е точно равенството $M_\alpha Q_\alpha = M_\alpha$ (за било кое $\alpha \in A$), а од тоа ќе следува дека е редуцибилна полугрупата M_α.

Нека $y \in M_\alpha$. Поради $M_\alpha \subseteq M = M Q$, постои $z_\beta \in Q_\beta \subseteq Q$, така да

(2.6) $$y \in M z_\beta = M_\beta z_\beta \subseteq M_\beta.$$

Од (2.6) следува

(2.7) $$y \varphi_\alpha^\beta \in (M_\beta z_\beta)\varphi_\alpha^\beta = M_\alpha z_\alpha,$$

каде $z_\alpha = z_\beta \varphi_\alpha^\beta$. Спрема (0.3.1) (поради $y \in M_\alpha \cap M_\beta$), имаме $y\varphi_\alpha^\beta = y$, па значи (2.7) добива облик

$$y \in M_\alpha z_\alpha, \tag{2.8}$$

што поради $z_\alpha \in Q_\alpha$, повлекува $y \in M_\alpha Q_\alpha$, т. е. $M_\alpha \subseteq M_\alpha Q_\alpha$. Од сето тоа следува точноста на равенството $M_\alpha Q_\alpha = M_\alpha$, што и сакавме да покажеме.

На тој начин, теоремата 2 е докажана во потполност.

3. Доказ на теоремата 3.

Ќе докажеме прво две поопшти теореми.

Теорема 3.1. Нека M_α и M_β се две подполугрупи на полугрупата M и нека: (*i*) $M_\gamma M_\delta \subseteq M_\delta$, за $\gamma, \delta = \alpha, \beta$; (*ii*) во M_γ важи законот за кратење од десно; (*iii*) e_γ е неутрален елемент во M_γ. Ако ставиме

$$x_\gamma \varphi_\delta^\gamma = x_\gamma e_\delta \tag{3.1}$$

добиваме дека φ_δ^γ е изоморфизам од M_γ на M_δ, а $\varphi_\gamma^\delta = \left(\varphi_\delta^\gamma\right)^{-1}$ од M_δ на M_γ.

Доказ Од (*i*) се гледа дека φ_β^α е пресликување од M_α во M_β а φ_α^β од M_β во M_α. Освен тоа, имаме

$$(x_\alpha y_\alpha)\varphi_\beta^\alpha = x_\alpha y_\alpha e_\beta = x_\alpha e_\beta y_\beta e_\beta = x_\alpha \varphi_\beta^\alpha \cdot y_\alpha \varphi_\beta^\alpha, \tag{3.2}$$

а слично и

$$(x_\beta y_\beta)\varphi_\alpha^\beta = x_\beta \varphi_\alpha^\beta \cdot y_\beta \varphi_\alpha^\beta \tag{3.3}$$

Спрема тоа, φ_β^α и φ_α^β се хомоморфизми. Од (*i*) и (*ii*) се добива

$$e_\beta e_\alpha e_\beta e_\alpha = e_\beta e_\alpha, \tag{3.4}$$

т. е.

$$x_\alpha e_\beta e_\alpha = x_\alpha e_\beta e_\alpha e_\beta e_\alpha, \tag{3.5}$$

од што ако се скрати со $e_\beta e_\alpha$, се добива

$$x_\alpha = x_\alpha e_\beta e_\alpha = x_\alpha \varphi_\beta^\alpha \varphi_\alpha^\beta. \tag{3.6}$$

На ист начин се добива и

$$x_\beta = x_\beta \varphi_\alpha^\beta \varphi_\beta^\alpha. \tag{3.7}$$

Од (3.6) и (3.7) следува дека φ_β^α е обратно-еднозначно пресликување од M_α на M_β и дека $\left(\varphi_\beta^\alpha\right)^{-1} = \varphi_\alpha^\beta$, од што (спрема (3.2)) следува точноста на теоремата.

Теорема 3. 2. Нека $\{M_\alpha; \alpha \in A\}$ е фамилија подполугрупи од полугрупата M, такви да се точни особините (*i*) — (*iii*) од теоремата 3.1 и нека

ставиме $S = \bigcup_{\alpha} M_\alpha$. Во тој случај, дадената фамилија подполугрупи е изоморфно-компатибилна, а $S(\cdot)$ е унијата на таа фамилијата

Доказ. Нека системот пресликувања $\{\varphi_\delta^\gamma; \gamma, \delta \in A\}$ биде определен како и во (3.1). Спрема теоремата 3.1, φ_δ^γ е изоморфизам од M_γ на M_δ. Да покажеме дека тој систем изоморфизми ги има особините (0.1), (0.2) и (0.3). Од $x_\alpha e_\alpha = x_\alpha$ следува точноста на (0.1), а поради $e_\gamma e_\delta = e_\gamma \varphi_\delta^\gamma = e_\delta$ добиваме

$$x_\alpha \varphi_\gamma^\alpha = x_\alpha e_\gamma = x_\alpha e_\beta e_\gamma = x_\alpha \varphi_\beta^\alpha \varphi_\gamma^\beta, \tag{3.7}$$

т. е. точноста на (0.2). Слично се добива и (0.3). Значи добивме дека фамилијата $\{M_\alpha ; \alpha \in A\}$ е изоморфно-компатибилна.

Дека множеството S е подполугрупа од M следува од (i). Исто така, имаме

$$x_\gamma x_\delta = x_\gamma e_\delta x_\delta = x_\gamma \varphi_\delta^\gamma \cdot x_\delta, \tag{3.8}$$

а од тоа следува дека $S(\cdot)$ е унија на дадената изоморфно-компатибилна фамилија подполугрупи.

Со тоа ја докажавме точноста на теоремата 3.2.

Јасно е дека теоремата 3 е специјален случај од теоремата 3.2. Имено, треба во 3.2 да се стави $S = M$.

Како следствие од теоремите 1.2, 1.3 и 3.1 се добива следствието 2 од работата [4].

4. Сите поими разгледани во оваа работа се „леви". Јасно е како би се формулирале симетричните им „десни" поими и добиле соодветни резултати за нив.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. H. Clifford, Extensions of Semigroups, Trans. Amer. Math. Soc vol. 68, (1950), 165—173.

[2] R. H. Bruck, A Survey of Binary Systems, Springer — Verlag, 1958.

[3] Ѓ. Чупона, За редуцибилните полугрупи, Год. Зб. Филоз. Фак. Скопје, кн. 11, (1958) 19—27.

[4] G. Čupona, On Completely Simple Semigroups, Glasnik Mat. — Fiz. Ast 18 (1963) 159—164.

ON SOME COMPATIBLE COLLECTIONS OF SEMIGROUPS

G. Čupona

Summary

1· Les S be a semigroup and $\{Q_i\,; i\in J\}$ a collection of left ideals of S such that (i) $S = \bigcup_{i\in J} Q_i$ and (ii) for every $i\epsilon J$, Q_i is a right cancellative semigroup (i. e. $x_i, y_i, z_i, \epsilon\, Q_i\ \&\ x_i z_i = y_i z_i => x_i = y_i$) with an identity element e_i. *If* $x_i \varphi_{ij} = x_i e_j$ then φ_{ij} is an isomorphism from Q_i onto Q_j such that

(1) $x \epsilon\, Q_i \cap Q_j => x\varphi_{ij} = x\ \&\ (y_i x)\, \varphi_{ij} = y_i x$, for every $y_i \epsilon\, Q_i$;

(2) $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$;

(3) $x_i y_j = x_i \varphi_{ij} \cdot y_j$, for every $x_i \epsilon\, Q_i, y_j \epsilon\, Q_j$.

2, Let $\{Q_i\,; i\epsilon J\}$ be a collection of isomorphic semigroups and let $\{\varphi_{ij}\,; i, j\epsilon J\}$ be a system of isomorphisms (φ_{ij} is an isomorphism of Q_i onto Q_j) such that the statements (1) and (2) are satisfied. Then φ_{ii} is the identity automorphism of Q_i; and if $xy = z$ in Q_i, $xy = u$ in Q_j then $z = u$, i. e. the given collection of semigroups is compatible. We say that $\{Q_i; i\epsilon J\}$ is an isomorphically (left) compatible collection of semigroups.

If $S = \bigcup_{i\epsilon J} Q_i$ and if an operation "·" is defined in S by (3), then $S(\cdot)$ is a semigroup, and every semigroup Q_i is a left ideal of S. If the semigroup $S\,(*)$ is a semigroup obtained by some other system of isomorphisms $\{\psi_{ij}; i, j\epsilon J\}$ (satisfying (1) and (2)) then the semigroups $S(\cdot)$ and $S(*)$ are isomorphic. The semigroup S is said to be the (left) union of the given collection of semigroups.

Let k be a fixed element of J and let us put $L_{ij} = (Q_i \cap Q_j)\,\varphi_{ik}$ Then $\{L_{ij}; i, j\epsilon J\}$ is a system of left ideals (some of which mav be empty) of $Q\,(= Q_k)$ such that

(4) $L_{ii} = Q, L_{ij} = L_{ji}$;

(5) $L_{ij} \cap L_{jr} \subseteq L_{ir}$.

If we put

(6) $(x,i)\,(y,j) = (xy,j)$, for every $x, y \epsilon\, Q, i, j\epsilon J$, then we obtain a semigroup $Q\times J$. The relation τ definend by

(7) $(x,i)\ \tau\,(y,j) <=> x = y \epsilon\, L_{ij}$

is a congruence in $Q\times J$, and the factor semigroup $Q\times J/\tau$ is isomorphic to the semigroup S (i. e. to the union of the given isomorphically compatible collection of semigroups).

3. Let Q be a semigroup, J a non-empty set, and $\{L_{ij}; i, j \epsilon J\}$ a collection of left ideals of Q such that the statements (4) and (5) are satistied. If an operation is defined in $Q \times J$ by (6) and a relation τ by (7) then $Q \times J$ is a semigroup and τ is a congruence in this semigroup. If $Q_i = \{(x,i); x \epsilon Q\} \subseteq Q \times J/\tau$[1]) then $\{Q_i; i \epsilon J\}$ is an isomorphically compatible collection of semigroups and $Q \times J/\tau$ is the union of this collection. (The semigroups Q_i are isomorphic to the given semigroup Q; a system of isomorphisms $\{\varphi_{ij}; i, j \epsilon J\}$ is detined by $(x,i)\,\varphi_{ij} = (x,j)$).

4. If the members of an isomorphically compatible collection of semigroups are left simple (i. e. $Q_i x_i = Q_i$ for every $x_i \epsilon Q_i$) then

(8) $Q_i \neq Q_j \Rightarrow Q_i \cap Q_j = \emptyset$.

Conversely, if $\{Q_i; i \epsilon J\}$ is a collection of isomorphic semigroups such that the statement (8) is satisfied, then the collection is isomorphically compatible, and its union is isomorphic to a semigroup $Q \times J$, where Q is a semigroup isomorphic to the semigroups of the collection and the product in $Q \times J$ is defined by (6).

There exist isomorphically compatible collections of semigroups $\{Q_i; i \epsilon J\}$ such that $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$ for some $i, j \epsilon J$. For example, such a collection is $\{Q_1, Q_2\}$ where $Q_1 = \{1', 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ and $Q_2 = \{1'', 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ are two semigroups isomorphic to the multiplicative semigroup of positive integers.

5. A semigroup S is said to be (left) reducible if $SM = S$, where M is a subsed defined by $x \epsilon M \Leftrightarrow \{Sx \subseteq Sy \Rightarrow Sx = Sy\}$. The union of an isomorphically compatible collection of semigroups is reducible if and only if the semigroups of the collection are reducible.

[1]) here, if $(x, i)\,\tau\,(x, j)$ then we assume that $(x, i) = (x, j)$.